Gebrochen zahliger Quantenhall-Effekt (Gauß Einheiten)

(s. Buch von T. Chakraborty und P. Pietiläinen).

Bei einer genauen Messung, wurden nicht ganzzahlige, gebrochene Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ gefunden?

Die Frage ist wie dies erklärbar ist, bei verschieden Materialien? Bisher haben wir den Einfluss des Magnetfelds betrachtet, kein Einfluss der Coulomb Wechselwirkung! Wie bei der Supraleitung steht die Konstruktion eines Grundzustands im Vordergrund.

Grundzustand nach Laughlin

Erster Trick: Statt x und y als Koordinaten wird eine komplexe Zahl z verwendet.

Wir verwenden $\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B} (y \underline{e}_x - x \underline{e}_y)$ als Eichung

Der niedrigste Landau-Level hat die Form

$$\phi_m(z) = \frac{1}{(2\pi l^2 2^m m!)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z}{l}\right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l^2}}$$

Der Hamilton Operator hat die Form

$$H = \sum_j \left[\frac{1}{2m_e} \left| -i\hbar \nabla_j - \frac{e}{c} \underline{A}_j \right|^2 + \underbrace{V(z_j)}_{\text{neutraler Hintergrund}} \right] + \underbrace{\sum_{j<k} \frac{e^2}{|z_j - z_k|}}_{\text{Coulomb Kopplung in idealem 2D}}$$

Man kann zeigen $\langle m | r^2 | m \rangle = 2(m+1) l^2$

Also dass der Radius des Zustands m $\sqrt{2(m+1)}$ der magnetischen Länge ist.

Zweiter Trick: Ansatz von Laughlin (Nobelpreis), verwendet Jastrow artigen Ansatz

(bekannt aus der Theorie des flüssigen Helium!)

Ansatz: Für Grundzustand für $\nu = \frac{1}{m}$ (bis $\frac{1}{m}$ gefüllt!)

$$\Psi_m = \underbrace{\prod_{j<k}^{N_e} (z_j - z_k)^m}_{} \underbrace{\prod_{j=1}^{N_e} e^{-|z_j|^2/4\ell^2}}_{}$$

Auch aus der Einteilchen-Wellenfunktion (Drehimpuls) — Motiviert von der Einteilchen Wellenfunktion.

$\Rightarrow$ Polynom $1, z, z^2, \ldots, z^{N_e - 1}$

Entartung des Landauniveaus

Bemerkung

1) Die Form des Ansatzes stellt ununterscheidbarkeit sicher!
2) An der Parität des Polynoms sehen wir, dass für m ungerade Fermistatistik erfüllt ist!

3) Wellenfunktion besteht aus Landau Grundzustand
4) Gesamtdrehimpuls (z!) ist $M = \frac{1}{2} N_e (N_e - 1) m$, wobei M der Grad des Polynoms ist.
   Entwicklung von $\prod(\ldots)$ in Ordnung von z_1 ergibt den Polynomgrad.

   höchste Grad: $m(N_e - 1) \simeq N_s - 1$ (siehe $\langle r^2 \rangle$ mit $\pi \langle r^2 \rangle \hat{=} A$ $\Rightarrow m \hat{=} N_s - 1$)

   Grad des Polynoms

   Für große N_e gilt es dann

$$m \hat{=} \frac{A}{2\pi \ell^2 N_e} = \frac{1}{\nu}$$

   Damit wird m durch durch die Dichte festgelegt.
5) Das die Wellenfunktion eine gute Näherung darstellt wurde Numerisch bestätigt.

Versuch das Quadrat der Wellenfunktion analog zur klassischen statistischen Physik auszuwerten:

$$|\Psi_m|^2 = e^{-\mathcal{H}_m}$$

↑ klassische Hamiltonfunktion (Erinnerung Statistik)

$$\mathcal{H}_m = \underbrace{-2m \sum_{j>k} \ln |z_j - z_k|}_{\text{2D Coulombpotential}} + \underbrace{\sum_j \frac{|z_j|^2}{2\ell_c^2}}_{\text{uniformer neutraler Hintergrund}}$$

Zum Vergleich klassisches Plasma

$$V(r) = -e^2 \sum_{j<k} \ln r_{jk} + \frac{1}{2}\pi \rho^2 e^2 \sum_j r_j^2$$

$$\text{mit } e^2 = 2m \qquad \rho_m = \frac{1}{2\pi \ell^2 m}$$

Das Plasma wird sich in einer Dichte anordnen, so dass es Ladungsneutral ist.

Disk mit Dichte ρ_m und $\nu = \frac{1}{m}$ mit m ungerade

$\Rightarrow$ Quantenflüssigkeit (translationsinvariante Quantenflüssigkeit!)

Ausgehend von dem Ansatz wird die Energie des Plasmas berechnet werden.

Elementare Anregungen: Quasilöcher und Quasielektronen

Wichtiges Ergebnis von Laughlin Theorie:

Die elementaren Anregungen ausgehend vom Zustand $\nu = \frac{1}{m}$ haben die Quasielektronen und Quasilöcher die Ladung $\mp \frac{e}{m}$! (kleiner als Elementarladung! Wie kann man das verstehen? Quasiteilchen verhält sich nur so als ob!)

Betrachten wir die Wellenfunktion von Laughlin noch mal im Gedankenexperiment: Wir fixieren die Position aller Elektronen außer einem, z. B. z_1

Wenn wir dieses, um die anderen Elektronen herum bewegen bekommen wir eine Phase von $\Delta\phi \sim 2\pi N_e m$ (Aharonov-Bohm Effekt)

An der Form der Wellenfunktion sehen wir dass es $N_e m$ Nullstellen für z_1 gibt.

Ergo es gibt eine Nullstelle pro Vortex, wobei Vortex ein Punkt ist bei dem sich die Phase um 2π verändert.

Quasiholes: Laughlin's Idee ist jetzt einen Vortex zu konstruieren, der nicht zu einem Elektron gehört (Falls Anregung knapp unter $\frac{1}{m}$ erfolgt)

Ansatz:

$$\Psi_m^{(-)} = e^{-\frac{1}{4}\sum_e \frac{|z_e|^2}{l_0^2}} \prod_j (z_j - z_0) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^m$$

mit $z_0 = x_0 + i y_0$ Eine einfache Nullstelle $z_j = z_0$ für jedes j und eine m-fache Nullstelle für $z_j = z_k$ $(k \neq j)$

Betrachte wir den Ham. Op

$$|\Psi_m^{(-)}|^2 = e^{-\mathcal{H}_m^{(-)}}$$

mit $\mathcal{H}_m^{(-)} = \mathcal{H}_m + 2\sum_j \ln|z_j - z_0|$

klassisches Plasma mit Phantomladung bei z_0, welche mit Faktor $\frac{1}{m}$ schwächer als die anderen Ladungen im Plasma.

Wie interpretieren wir das?

Das Plasma wird die Phantomladung neutralisieren

Dabei entsteht ein Ladungsdefizit von $\frac{1}{m}$ nahe z_0.

$\Rightarrow$ Ladung wird vom Hintergrund und den Elektronen getragen und nicht vom Phantom!

Trotz der netto Ladung von $-\frac{e}{m}$ nahe z_0

und die Wellenfunktion beschreibt ein Quasiloch bei z_0

Zusätzlich zum Loch gibt es den anderen Fall

$\Rightarrow$ Quasiparticle: Elektronendichte ist ein bisschen höher als $\frac{1}{m}$ (jetzt muss ein Flussquant fehlen)

$$\Psi^{(-)} = \prod_{j=1}^{N_e} \Big[e^{-|z_j|^2/4l_0^2} \underbrace{\left(2l^2 \frac{\partial}{\partial z_j} - z_0^*\right)}_{\text{Entfernt ein Flussquant bei } z_0} \Big] \prod_{l<k} (z_l - z_k)^m$$

Leider kann jetzt $|\Psi|^2$ nicht als klassischer Vielteilcheneffekt interpretiert werden.

$$|\Psi^{(-)}|^2 = \prod_{j=1}^{N_e} \left(e^{m r_j^2} \frac{1}{4\pi ?} \nabla_j^2 \right) \exp\left(2m \sum_{j<k} \ln|r_j - r_k| \right)$$

Auch hier kann man die Energie berechnen und damit den gebrochenen zahligen Quantenhalleffekt.