

Sebrochen zahliger Quanten hall - Effekt (Gauß Einheiten)

(s. Buch von T. Chakraborty und P. Pietiläinen)

Bei einer genauen Messung, werden nicht ganzzahlige, gebrochene Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ gesehen?

Die Frage ist wie dies erklärt ist, bei verschiedenen Materie? Bisher haben wir den Einfluss des Magnetfelds betrachtet, kein Einfluss der Coulomb Wechselwirkung! Wie bei der Supraleitung, steht die Konstruktion eines Grundzustands im Vordergrund.
Grundzustand nach Laughlin

Erster Trick: Statt x und y als Koordinaten

wird eine komplexe Zahl z verwendet.

Wir setzen $\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B} (y \underline{e}_x - x \underline{e}_y)$ als Eichung

Der niedrigste Landau-Land hat die Form

$$\phi_m(z) = \frac{1}{(2\pi e^2 z^m m!)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z}{l}\right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l^2}}$$

Der Hamilton Operator hat die Form:

$$H = \sum_j \left[\frac{1}{2m_0} | -i\hbar \nabla_j - \frac{q}{c} \underline{A}_j |^2 + \underbrace{V(z_j)}_{\text{keine Hintergr.}} \right] + \sum_{i < j} \underbrace{\frac{e^2}{|z_i - z_j|}}_{\text{Coulomb Koppl. in idealer 2D}}$$

Man kann zeigen $\langle m | r^2 | m \rangle = 2(m+1)l^2$

Also das der Radius des Zustands m $\sqrt{2(m+1)}l$ der magnetischen Länge ist.

Zweiter Trick: Ansatz von Laughlin (Nobelpreis), verwendet Jastrow-artigen Ansatz

(bekannt aus der Theorie des flüssigen Helium!)

Ansatz: Für Grundzustand für $\nu = \frac{1}{m}$ (bis $\frac{1}{m}$ gefüllt!)

$$\psi_m = \prod_{j < k}^{N_e} (z_j - z_k)^m$$

$$\prod_{j=1}^{N_e} e^{-|z_j|^2 / 4\ell^2}$$

Auch aus der Finteilchenwellenfunktion (Drehimpuls)

Motiviert von der Einteilchenwellenfunktion.

\Rightarrow Polynom $1, z, z^2, \dots, z^{N_e-1}$

\uparrow
Entartung des Landau-Niveaus

Bemerkung

- 1) Die Form des Ansatzes stellt ununterscheidbarkeit sicher!
- 2) An der Parität des Polynoms sehen wir, dass für m ungerade Fermistatistik erfüllt ist!

3) Wellenfunktion besteht aus Landau Grundzustand

4) Gesamt Drehimpuls (z^l) ist $M = \frac{1}{2} N_e (N_e - 1) m$, wobei M der Grad des Polynoms ist.

Entweder wichtig von $\Pi(\dots)$ mit Ordnung von z , ergibt den Polynomgrad.

höchste Grad: $m(N_e - 1) \approx N_e - 1$ (siehe $\langle v^2 \rangle$ mit

$$\begin{aligned} \Pi(z, v^2) &\leq A \\ \Rightarrow m &\leq N_e - 1 \\ &\uparrow \\ &\text{Grad des} \\ &\text{Polynoms} \end{aligned}$$

Für große N_e sieht es aus

$$m \approx \frac{A}{2\pi \ell^2 N_e} = \frac{1}{\nu}$$

Damit wird m durch die Dichte festgelegt.

- 5) Das die Wellenfunktion eine gute Näherung darstellt wurde numerisch bestätigt.

Versuch das Quadrat der Wellenfunktion analog zur klassischen statistischen Physik anzusehen:

$$|\psi_m\rangle^2 = e^{-\beta H_m}$$

↑
klassischer Hamiltonoperator
(Ermittlung Statistik)

$$\beta H_m = -2m \underbrace{\sum_{j>k} \ln |z_j - z_k|}_{\text{2D Coulombpotential}} + \sum_j \underbrace{\ln \frac{\beta R}{2\ell^2}}_{\text{uniforme rechte Hintergrund}}$$

Zum Vergleich klassischer Plasmen

$$V(r) = -e^2 \sum_{j<k} \ln r_{jk} + \frac{1}{2} \pi g^2 e^2 \sum_j r_j^2$$

mit $e^2 = 2m$ $g_m = \frac{1}{2\pi \ell^2 m}$

Das Plasmen wird sich in einer Dichte anordnen, so dass es Ladungsneutral ist.

Disk mit Dichte g_m und $v = \frac{1}{m}$ mit m umkehr

⇒ Quasiflüssigkeit (translativen invarianter Quasiflüssigkeit!)

Ausgehend von dem Ansatz wird die Energie des Plasmas berechnet werden.

Elementare Anregungen: Quasilöcher und Quasielektronen

Wichtiges Ergebnis von Laughlin Theorie:

Die elementare Anregung ausgehend vom Zustand $v = \frac{1}{m}$

haben die Quasielektronen und Quasilöcher die Ladung

$\pm \frac{e}{m}$! (kleiner als Elementarladung! Wie kann man das verstehen?)

Quasiteilchen verhält sich nur so als ob!

Betrachte wir die Wellenfunktion von Laughlin noch mal
 in Sechsexponente: Wir fixieren die Position

aller Elektronen außer einem, z. B. z_1

Wenn wir dann, um die anderen Elektronen herum bewegen
 bekommen wir eine Phase von $\Delta\phi \sim 2\pi N_e m$ (Aharonov-
 Bohm Effekt)

An der Form der Wellenfunktion sehen wir dass es
 $N_e m$ Nullstellen für z_1 gibt.

Ergo es gibt eine Nullstelle pro Vortex, wobei
 Vortex ein Punkt ist bei dem sich die Phase um
 2π verändert.

Quasipartikel: Laughlin's Idee ist jetzt einen
 Vortex zu konstruieren, der nicht zum einen
 Elektron gehört (falls Anregung knapp unter $\frac{1}{m}$ erfolgt)

Ansatz:
$$\psi_m^{(\rightarrow)} = e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2} \prod_j (z_j - z_0) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m$$

mit $z_0 = x_0 + i y_0$ Eine einfache Nullstelle $z_j = z_0$
 für jedes j und eine m -fache Nullstelle für $z_j = z_k$ ($k \neq j$)

Betrachte wir den Ham. Op

$$|\psi_m^{(\rightarrow)}|^2 = e^{-H_m^{(\rightarrow)}}$$

mit $H_m^{(\rightarrow)} = H_m + 2 \sum_j \ln |z_j - z_0|$

klassisches Plasma mit Phantomladung bei z_0 ,
 welche mit Faktor $\frac{1}{m}$ schwächer als die anderen
 Ladungen im Plasma.

Wie interpretieren wir das?

Das Plasma wird durch Phantomladung neutralisiert

Dabei entsteht ein Ladungsdefizit von $\frac{1}{m}$ nahe z_0 .

\Rightarrow Ladung wird von Hintergrundmedium Elektronen getragen und nicht von Phantom!

Trotz der Netto Ladung von $-\frac{e}{m}$ nahe z_0

und die Wellenfunktion verstreut ein Quasipartikel bei z_0

Zusätzlich zum Loch gibt es den anderen Fall

\Rightarrow Quasipartikel: Elektronendichte ist ein bisschen höher als $\frac{1}{m}$ (jetzt muss ein Flussquant fehlen)

$$\psi^{(-)} = \frac{N_e}{\prod_{j=1}^N} \left[e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |z_j|^2} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - z_0^* \right) \prod_{j=1}^N (z_0 - z_j) \right]$$

Entfernt ein Flussquant bei z_0

Leider kann jetzt $|\psi\rangle$ nicht als klassische Vektorlösung interpretiert werden.

$$|\psi^{(-)}\rangle^2 = \frac{N_e}{\prod_{j=1}^N} \left(e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2} \frac{1}{4\pi^2} \nabla_0^2 \right) \exp\left(2m \sum_{j=1}^N \ln |z_0 - z_j| \right)$$

Auch hier kann man die Energie berechnen

und damit den gebrochenen zehnten Ahnereffekt.