

Klein-Gordon-Gleichung

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

c Lichtgeschw., p relativist. mechan. Impuls
 m_0 Ruhemasse

Korrespondenzprinzip
 $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$

quadriere zunächst: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

$$\Rightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta) \psi$$

$\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$

mit $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\Rightarrow \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung
(KG)

Bemerkung:

Die Größe $\frac{\hbar}{m_0 c} = \lambda_c$ heißt Compton-Wellenlänge

(sie spielt eine Rolle bei der relativist. Streuung von Quantenmechanik-Teilchen)

Weitere Diskussion der KG-Gleichung

a) Die KG-Gleichung ist eine partielle DGL zweiter Ordnung in der Zeit

\Rightarrow Zur Lösung benötigt man nicht nur $\psi(t=0)$
sondern auch $\dot{\psi}(t=0)$

Die (nicht-relativistische) Schrödinger-Gl. ist dagegen erster Ordnung in der Zeit!
($i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$)

b) Die KG-Gleichung ist "Lorentz-invariant", d.h. sie ändert sich nicht bei einem Wechsel des Inertialsystems

Lorentzinvarianz $\hat{=}$ man kann die Gleichung durch Skalarprodukte von Vektoren und Skalar ausdrücken

Begründung

läßt sich schreiben als

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu \quad \text{mit} \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{zeitl. Vektorraum}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{räuml. Vektorraum}}$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right)$$

$\Rightarrow \square$ entspricht einem Vier-Skalarprodukt und ist damit Lorentzinvariant!

Da der Term $\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2$ in der KG-Gleichung ebenfalls Skalar und ist damit automatisch invariant

\Rightarrow KG-Gl. ist Lorentzinvariant, falls ψ ein Skalar ist

Beachte:

Für $m_0 \rightarrow 0$ reduziert sich die KG-Gleichung auf $\square \psi = 0$

bekannte Wellengleichung aus der Elektrodynamik

c) Beachtung des Spins ... ??

Erinnerung an die nicht-relativist. Quantenmechanik

Spin $\hat{=}$ Drehimpuls mit Drehimpulsquantenzahl $l = s = \frac{1}{2}$
des Elektrons

Drehimpuls wird im Hamiltonoperator "eingebaut" über

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \hat{\mu} \cdot \underline{B}$$

magnetisches Feld
(extern)

Operator des magnetischen Moments.

Dieser Operator ist proportional zum Drehimpuls

$$\hat{\mu} \sim \underline{L} \quad (\text{hier: } \underline{L} = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma})$$

Problem bei der Relativist. QM:
 Familie der

$\hat{\mu} \cdot \underline{B}$ kann nicht als Skalarprodukt von Vektoren geschrieben werden

\Rightarrow Zusatzterm der Form $-\hat{\mu} \cdot \underline{B}$ in der KG-Gleichung
 würde die Lorentzinvarianz verletzen!

Schlussfolgerung: Die KG-Gleichung ist eine Gleichung für Teilchen
 mit Spin $S=0$, aber sie ist nicht geeignet für Teilchen
 mit Spin $\neq 0$ (z.B. Elektronen)

z.B. π -Mesonen

d) Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

Erinnerung: Klass. Elektrodynamik.

$$\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$$

Ladungsdichte
Stromdichte

Durch Erhaltung der
 Gesamtladung $Q = \int d\underline{r} \rho(\underline{r}, t)$
 aus

$$\left(\begin{array}{l} \text{relativistisch: } \partial_\mu j^\mu = 0 \\ \text{mit } \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad j^\mu = (\rho c, \underline{j}) \end{array} \right)$$

\Rightarrow Kontinuitätsgleichung ist Lorentzinvariant!

Erinnerung: Nicht-relativist. QM (Schrödinger)

$$\text{ih} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

Kontinuitätsgleichung gibt für folgende Größe

$$\rho(r,t) = \psi^*(r,t) \psi(r,t) \quad \text{Aufenthaltswahrscheinlichkeit}$$

$$j(r,t) = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstrom}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(r,t) + \nabla \cdot j(r,t) = 0$$

Dürrt Erhaltung der Wahrsch. aus!

$$\int dV \rho(r,t) = \int dV \psi^* \psi = 1$$

Frage: erfüllt auch die KG-gl. eine Kontinuitätsgleichung?

Ausgangspunkt: $(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0$ mit $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi \quad | \cdot \psi^*$$

$$\partial^\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

$$\Rightarrow \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi \quad \textcircled{a}$$

Komplex konjugieren:

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \quad \text{(Komplex konjugierte KG-gl.)}$$

multiplizieren mit $\psi \rightarrow \textcircled{b}$

betrachte $\textcircled{a} - \textcircled{b}$

$$\psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} (\psi^* \psi - \psi \psi^*) = 0$$

benutze: $\psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi = \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - (\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi)$

andere: $\psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = \partial_\mu ((\partial^\mu \psi^*) \psi) - (\partial^\mu \psi^*) (\partial_\mu \psi)$

inverse Produktregel für Ableitungen

benutze noch: $(\partial_\mu \psi^*) (\partial^\mu \psi) = (\partial^\mu \psi^*) (\partial_\mu \psi)$

es ergibt sich

$$\Rightarrow \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - \partial_\mu ((\partial^\mu \psi^*) \psi) = 0$$

$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = 0$$

Man "erkennt": Dies entspricht bereits einer Kontinuitätsgleichung falls man folgenden Ansatz macht

$$j^\mu \sim (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Damit: $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

wähle Vorzeichen für die räuml. Komponenten wie im nicht-relativist. Fall

$$j^\mu \begin{cases} j = \frac{\hbar}{2im_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) & \text{räuml. Komponente des Viererstroms} \\ g = (j^0) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) & \text{zeitl. Komponente des Viererstroms} \end{cases}$$

Man sieht

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ sieht aus wie in der nicht-relativist. Quantentheorie (Schrödinger)

aber $g = g(\vec{r}, t)$ hat andere Form (Schrödinger: $g = \psi^* \psi$)

Wiederum: - g enthält nicht nur ψ, ψ^* sondern auch die ersten (Zeit-) Ableitungen
 - je nach Anfangsbedingungen für ψ und $\dot{\psi}$ kann nicht ausgeschlossen werden, dass g auch negativ werden kann!

\Rightarrow Wir können also $g(\vec{r}, t)$ nicht einfach als Wahrsch.-dichte auffassen, so wie wir es in der nicht-relativist. Theorie gemacht haben!

e) Lösungen der KG-Gleichung für freies Teilchen

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

Ansatz: $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$

(oder allgemeiner als Überlagerung ebener Wellen)

Einsetzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi \\ &= \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 \left(\mathbf{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right)$$

$$\omega = \pm c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}}$$

Dispersionsrelation

mit $E = \hbar \omega$, $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$

$$\Rightarrow E = \hbar \omega = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad \text{2 Lösungen!}$$

Es gibt also formal immer auch eine Lösung mit negativer Energie !!

Lösung mit positiver Energie: entspricht der Energie-Impuls-Relation, mit der wir gearbeitet haben!

Interpretation der Lösung mit negativer Energie ---- ?

Famaler Umgang mit diesen Problemen.

Quantenfeldtheorie, das entspricht ψ ist nicht einfach eine Wellenfunktion sondern eine Erzeugnis- bzw. Vernichtungsoperator für Teilchen

Ladungsinterpretation der KG-Gleichung

Wir haben gesehen:

i) die durch die Kontinuitätsgl. definierte Dichte kann negativ werden
 \Rightarrow Interpretation als Aufenthaltswahrsch. nicht möglich

ii) die KG-Gl. für freie Teilchen besitzt Lösung mit $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

"Ausweg"

zu i)

Definieren durch Multiplikation mit dem Elementarladung e_0 eine Ladungsdichte

$$g'(\underline{r}, t) = e_0 g(\underline{r}, t) = \frac{i \hbar e_0}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

entsprechend "Ladungsstromdichte"

$$j'(\underline{r}, t) = e_0 j(\underline{r}, t) = -\frac{\hbar e_0}{2m_0} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right)$$

Beispiel freies Teilchen

setze $\psi_{\pm}(\underline{r}, t) = A_{\pm} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t)}$ mit $(E) = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

Kombinieren mit der Def. von $g'(\underline{r}, t)$

Man findet $g'_{\pm}(\underline{r}, t) = \pm \frac{e_0 (E)}{m_0 c^2} \underbrace{\psi_{\pm}^*(\underline{r}, t) \psi_{\pm}(\underline{r}, t)}_{\text{per definitionem positiv!}}$

~~Interpretation~~ "Bild dazu"

$$\left. \begin{array}{l} \psi_+ : \text{Teilchen mit Ladung } +e_0 \\ \psi_- : \text{ " " " " } -e_0 \end{array} \right\} \text{ beide haben Ruhemasse } m_0$$

man hat also "Teilchen - Antiteilchen - Paar"

Hinweis darauf, dass die relativist. QM per se Vielteilchentheorie ist

f) Nicht-relativistischer Grenzfall der KG-Gleichung für zwei Teilchen

Startpunkt: KG-Gleichung

Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(\underline{x}, t) = \varphi(\underline{x}, t) e^{-i \frac{1}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad \left(\sim e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \frac{1}{\hbar} E t} \right)$$

$$\text{und } \varphi(\underline{x}, t) = \varphi_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \frac{1}{\hbar} E' t}$$

$$\text{mit } E' = E - m_0 c^2$$

Idee dahinter:

Wir spalten im Zeitfaktor $\sim e^{-i \frac{1}{\hbar} E t}$ die Ruheenergie $m_0 c^2$ ab, denn:

im nicht-relativist. Grenzfall ist die Ruheenergie die dominierende Energie im System, d.h.

$$E' = E - m_0 c^2 \ll m_0 c^2$$

$\Rightarrow \varphi(\underline{x}, t)$ ist nun langsam veränderlich mit der Zeit

\Rightarrow benutzt dies in der KG-Gl.

\rightarrow nächstes Mal!

betrachte
Lösung mit
positiver Energie