

Dirac-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t)$$

↑ Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

↑ Impulsoperator (Vektoroperator)

$$\hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Was sind die "Koeffizienten" $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$?

Matrizen
($N \times N$)

$\Rightarrow \psi$ ist ein Vektor, "Spinor"

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

Forderung:

Die Dirac-Gleichung soll mit dem relativist. Energie-Impuls-Bezieh. kompatibel sein \rightarrow die Komponenten des Spinors $\underline{\psi}$ sollen drei Klein-Gordon-Gleichungen erfüllen

Wende dazu die Dirac-Gl. zweimal an

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \hat{H}_D (\hat{H}_D \psi)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(c \sum_i \hat{\alpha}^i \partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \left(c \sum_j \hat{\alpha}^j \partial_j + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi$$

Einsten'sche Summenkonvention!
 $\hat{\alpha}^i \partial_i \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}^i \partial_i$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \partial_i$$

↑ räuml. Ableitung nach Komponente i
($i=1,2,3$)

$$= -\hbar^2 c^2 \hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j \psi + \frac{\hbar^2 m_0^2 c^4}{i} (\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^j \partial_j) \psi + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi \quad (*)$$

Annahme: $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ ortsunabhängig \rightarrow sie vertausche mit $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \partial_i$

(*) , 1. Term auf der rechten Seite

$$\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j = \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2} (\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i) \partial_i \partial_j$$

"Symmetrisierung"

(*) , 2. Term auf der rechten Seite

$$\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^j \partial_j = (\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \partial_i$$

$$\begin{aligned}
 \text{aus } \textcircled{1} \\
 \Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\frac{\hbar^2 c^2}{2} (\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i) \partial_i \partial_j \psi \\
 &+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i} (\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \partial_i \psi + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi \\
 &\stackrel{!}{=} \left(\frac{\hbar^2 c^2}{2} + m_0^2 c^4 \right) \psi
 \end{aligned}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

Klein Gordon-Gl.:

$$= \left(-\hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

Dies soll für jede Komponente von ψ gelten!

Folgerungen:

- ① $\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2 \delta_{ij} \hat{1}$
- ② $\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0$
- ③ $\hat{\beta}^2 = \hat{1}$

Man hat also vier 'anti-kommutierende' Operatoren $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3, \hat{\beta}$

$$\hookrightarrow [\hat{A}, \hat{B}]_{\pm} = \hat{A}\hat{B} \pm \hat{B}\hat{A}$$

Frage: Dimension der Matrizen zu den vier Operatoren?

Zunächst gilt wegen (2)

$$\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}, \text{ aus (3): } \hat{\beta}^{-1} = \hat{\beta}$$

$$a) \Rightarrow \text{Sp}(\hat{\alpha}^i) = -\text{Sp}(\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}) \stackrel{\text{Zykl. Invarianz}}{=} -\text{Sp}(\hat{\beta}^{-1} \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \stackrel{(3)}{=} -\text{Sp}(\hat{\alpha}^i)$$

$$\Rightarrow \text{Sp} \hat{\alpha}^i = 0$$

\Leftrightarrow Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^i$ ergibt Null
Spur

$$b) \text{ Relation (1) impliziert } \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^i = (\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{1}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}^i \text{ hat die Eigenwerte } \pm 1$$

a)+b)
 \Rightarrow die Dimension N der Matrizen muss gerade sein
(\Leftrightarrow Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muss gleich sein)

Beachte:

Die Dimension $N \geq 2$ gilt nicht, da man dann nicht genügend (nicht vier) unabhängige Matrizen zur Erhaltung der Relationen (1)-(3) finden würde

\Rightarrow die niedrigste mögliche Dimension für $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ ist $N=4$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ ist ein vierdimensionaler Vektorraum
 \uparrow
Spur

Weitere Forderung:

$\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ hermitisch (Das wird später klar bei der Betrachtung der Kontinuitätsgleichung)

Explizite Darstellung der Dirac-Koeffizienten

Eine mögl. Darstellung der Matrizen ("Standard-Darstellung") ist:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0_{2 \times 2} : 2 \times 2 \text{ Matrix mit Null-Einträge}$$

$\hat{\sigma}^i$ ($i=1,2,3$): Pauli-Spinmatrizen (2x2)

mit $\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

es gilt: $(\hat{\sigma}^i)^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$, $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]_+ = 0$, $\hat{\sigma}_i^\dagger = \hat{\sigma}_i$ hermitesch
Eigenwerte ± 1

außerdem...

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

Erinnerung zum Thema Pauli-Spinmatrizen

Drehimpulse = \hat{L} ^{Eigenwertgleichung}
 $\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$ $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
 $\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$

Gilt für alle Arten von Drehimpulsen! Bahndrehimpulse, Spin $m = -l, \dots, l$ (ganzzahlige Schritte)

außerdem: $\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-)$ ^{Leitoperatoren}
 $\hat{L}_+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle$
 $\hat{L}_y = \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-)$ $\hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$

Die Pauli-Spin-Matrizen sind die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ für $l = \frac{1}{2}$ in den Zuständen $|l, m\rangle$

$\Rightarrow \underbrace{\langle l, m | \hat{l}_i | l, m \rangle}_{\text{Matrixelement}}$ mit $i=x, y, z$ und $l = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Man erhält: $\hat{l}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x$

$\hat{l}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y$

$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$

$(\hat{\sigma}_i)^\dagger = \hat{\sigma}_i$
hermitisch

Zurück zum Dirac-Operator

$\hat{H}_D = c \underline{\hat{\alpha}} \cdot \hat{p} + \hat{\beta} m_0 c^2$

Einsetzen der Standard-Darstellung für $\underline{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$ und $\hat{\beta}$

$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}$
 $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \hat{H}_D = c (\hat{\alpha}^1 \hat{p}_1 + \hat{\alpha}^2 \hat{p}_2 + \hat{\alpha}^3 \hat{p}_3) + \hat{\beta} m_0 c^2$

$= \begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 & c p_z & c(p_x - i p_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + i p_y) & -c p_z \\ \hline c p_z & c(p_x - i p_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + i p_y) & -c p_z & 0 & -m_0 c^2 \end{pmatrix}$

4×4 Matrix, die Standard-Darstellung von \hat{H}_D entspricht

Dirac-Gleichung in kovariante Form

Erinnerung: Die Dirac-Gl. ist $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi$ (*)

ist eine DGL erster Ordnung in der Zeit und im Raum (\hat{p} geht immer linear ein!)

\Rightarrow Raum-Zeit-Symmetrie bzgl. der Ableitung ist schon mal gewährleistet!

Kovariante Form:

multipliziere dazu die Dirac-Gl. (*) mit $\frac{1}{c} \hat{\beta}$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{1}{c} \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{1}{c} \hat{\beta} \hat{H}_D \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c} \hat{\beta} (c \hat{\alpha} \hat{p} + \hat{\beta} m_0 c^2) \right) \psi = 0$$

$$\text{benutze: } \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \hat{\beta}^2 = 1$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \left(i\hbar \hat{\beta} \partial_0 + i\hbar \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i - m_0 c \hbar \right) \psi = 0 \quad (-1)$$

$i = 1, 2, 3$

$$\left(-i\hbar (\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i) + m_0 c \hbar \right) \psi = 0 \quad (**)$$

Definiere nun die neuen Dirac-Matrizen

$$\left. \begin{aligned} \hat{\gamma}^0 &= \hat{\beta} \\ \hat{\gamma}^i &= \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &4 \text{ Matrizen } \mu = 0, 1, 2, 3, \\ &\text{sie bilden zusammen den 4-Vektor } \underline{\hat{\gamma}} \\ &(\text{die Einträge sind wieder } \hbar \times \hbar \text{ Matrizen}) \end{aligned}$$

aus (**)

$$\left(-i\hbar (\hat{\gamma}^0 \partial_0 + \hat{\gamma}^i \partial_i) + m_0 c \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0 \quad |_{st}$$

$$\Rightarrow \left(-i \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Verkürzte Schreibweise (Feynman)

$$\cancel{\partial} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu \quad (\text{Skalarprodukt aus dem Vektor } \vec{\gamma} \text{ und dem kovarianten Ableitungsvektor})$$

$$\boxed{\left(-i \cancel{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0}$$

Konkante Form der Dirac-Gleichung

Kontinuitätsgleichung in der Dirac-Theorie

Zurück zur "alten" Form der Dirac-Gl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = \hat{H}_D \underline{\psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c \hat{\alpha}^i \hat{p}_i + \hat{\beta} m_0 c^2$$

multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor (Zeilenvektor)

$$\underline{\psi}^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\Rightarrow i\hbar \underline{\psi}^+ \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = c \underline{\psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi} + m_0 c^2 \underline{\psi}^+ \hat{\beta} \underline{\psi} \quad (\hat{1})$$

Nehme nun die adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit ψ

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger &= c \left(\vec{\alpha}^i \hat{p}_i \psi \right)^\dagger + m_0 c^2 \left(\hat{\beta} \psi \right)^\dagger \\ &= c \left(\hat{p}_i \psi \right)^\dagger \left(\vec{\alpha}^i \right)^\dagger + \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger m_0 c^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(\vec{A} \vec{B})^\dagger = \vec{B}^\dagger \vec{A}^\dagger}$$

$$\Rightarrow -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger \right) \psi = c \left(\hat{p}_i \psi \right)^\dagger \vec{\alpha}^i \psi + \psi^\dagger \hat{\beta} \psi m_0 c^2 \quad (\text{2})$$

Bilde (1) - (2)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) &= c \left(\psi^\dagger \vec{\alpha}_i \hat{p}_i \psi - \left(\hat{p}_i \psi \right)^\dagger \left(\vec{\alpha}^i \right) \psi \right) \\ &\quad + m_0 c^2 \left(\psi^\dagger \hat{\beta} \psi - \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \psi \right) \end{aligned}$$

ersetze $\hat{p}_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_i$

$$\left(\hat{p}_i \psi \right)^\dagger = -\frac{\hbar}{i} \partial_i \psi^\dagger$$

benutze
 $(\alpha \hat{A})^\dagger = \alpha^* \hat{A}^\dagger$

und benutze dass $\vec{\alpha}_i$ ortsunabhängig

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) &= c \frac{\hbar}{i} \left(\psi^\dagger \vec{\alpha}_i \partial_i \psi + \partial_i \psi^\dagger \left(\vec{\alpha}^i \right) \psi \right) \\ &\quad + m_0 c^2 \left(\psi^\dagger \hat{\beta} \psi - \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \psi \right) \end{aligned}$$

Fordere nun (mit Blick auf die Konstruktion einer Kontinuitätsgleichung), dass $\left(\vec{\alpha}^i \right)^\dagger = \vec{\alpha}^i$, $\hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}$ (hermitisch)

Dann hebt sich der letzte Term heraus

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi + \psi) = -c \partial_i (\psi + \hat{\alpha}^i \psi)$$

Das hat genau drei Form einer Kontinuitätsgleichung!!

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Kontinuität

mit $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$

j^μ Viererstrom mit $j^0 = c \rho$ und $\rho = \psi + \psi$

$$j^i = c \psi + \hat{\alpha}^i \psi$$

(räumliche Komponente)

Kontinuität:

$$\rho = \psi + \psi$$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0$$

erlaubt Interpretation als echte Wahrscheinlichkeitsdichtestromdichte!

$$\vec{j} = c \psi + \hat{\alpha} \psi \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte}$$