Dirac-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t) \quad , \quad \hat{H}_D = c\,\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

$\hat{H}_D$: Dirac-Operator

$\hat{\underline{\alpha}}$: Linearfaktor; $\hat{\underline{p}}$: Impulsoperator (Vektoroperator)

$$\hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Was sind die "Koeffizienten" $\underbrace{\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}}_{\substack{\text{Matrizen} \\ (N \times N)}}$?

$\Rightarrow \psi$ ist ein Vektor, „Spinor"

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

Forderung:

Die Dirac-Gleichung soll mit der relativist. Energie-Impuls-Beziehung kompatibel sein $\Rightarrow$ die Komponenten des Spinors $\underline{\psi}$ sollen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen

Wende dazu die Dirac-Gl. zweimal an

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\underline{\psi}\right) = \hat{H}_D\left(\hat{H}_D \underline{\psi}\right)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\psi} = \left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^i \partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^j \partial_j + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\underline{\psi}$$

Einstein'sche Summenkonvention!

$$\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{=} \sum_{i=1}^{3} \hat{\alpha}^i \partial_i$$

$$\hat{\underline{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

$$\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\partial_i$$

∂_i: räuml. Ableitung nach Komponente i $(i = 1,2,3)$

$$= -\hbar^2 c^2 \hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j \underline{\psi}$$
$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i}\left(\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^j \partial_j\right)\underline{\psi} + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \underline{\psi} \qquad (*)$$

Annahme: $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ ortsunabhängig $\rightarrow$ sie vertauschen mit $\hat{p}^i = \frac{\hbar}{i}\partial_i$

$(*)$, 1. Term auf der rechten Seite

Einstein'sche Summenkonvention $\Rightarrow$ jeder Term kommt zweifach vor

$$\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j = \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i\right)\partial_i \partial_j$$

„Symmetrisierung"

$(*)$, 2. Term auf der rechten Seite

$$\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^j \partial_j = \left(\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\right)\partial_i$$

aus (*)

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \underline{\Psi}}{\partial t^2} = -\frac{\hbar^2 c^2}{2}\left(\hat\alpha^i\hat\alpha^j + \hat\alpha^j\hat\alpha^i\right)\partial_i\partial_j \underline{\Psi}$$

$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i}\left(\hat\alpha^i\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^i\right)\partial_i \underline{\Psi} + \hat\beta^2 m_0^2 c^4 \underline{\Psi}$$

$$\overset{!}{=} \left(\hat p^2 c^2 + m_0^2 c^4\right)\underline{\Psi} \qquad \boxed{\hat p = \frac{\hbar}{i}\nabla}$$

Klein-Gordon-Gl.!

$$= \left(-\hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m_0^2 c^4\right)\underline{\Psi}$$

Dies soll für jede Komponente von $\underline{\Psi}$ gelten!

Folgerungen:

1. $\hat\alpha^i\hat\alpha^j + \hat\alpha^j\hat\alpha^i = 2\delta_{ij}\hat{1}$
2. $\hat\alpha^i\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^i = 0$
3. $\hat\beta^2 = \hat{1}$

Man hat also vier "anti-kommutierende" Operatoren $\hat\alpha^1, \hat\alpha^2, \hat\alpha^3, \hat\beta$

$\hookrightarrow [\hat A, \hat B]_+ = \hat A\hat B + \hat B\hat A$

Frage: Dimension der Matrizen zu den vier Operatoren?

Zunächst gilt wegen ②

$$\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1} \quad , \text{ aus ③: } \hat{\beta}^{-1} = \hat{\beta}$$

a) $\Rightarrow Sp(\hat{\alpha}^i) = -Sp(\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1}) \overset{\text{zykl. Invarianz}}{=} -Sp(\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}\hat{\alpha}^i) \overset{③}{=} -Sp(\hat{\alpha}^i)$

$$\Rightarrow Sp\,\hat{\alpha}^i = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\text{Summe der Eigenwerte}}_{\text{Spur}}$ von $\hat{\alpha}^i$ ergibt Null

b) Relation ① impliziert $\hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^i = (\hat{\alpha}^i)^2 = 1$

$\Rightarrow \hat{\alpha}^i$ hat die Eigenwerte ± 1

$\overset{a)+b)}{\Longrightarrow}$ die Dimension N der Matrizen muss gerade sein
($\Leftrightarrow$ Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muss gleich sein)

Beachte:
Die Dimension $N=2$ geht nicht, da man dann nicht genügend (nicht vier) unabhängige Matrizen zur Erfüllung der Relation ①–③ finden würde

$\Rightarrow$ die niedrigste mögliche Dimension für $\hat{\alpha}^i$ und $\hat{\beta}$ ist $N=4$

$\Rightarrow \underline{\Psi}$ ist ein vierdimensionaler Vektor
Spinor

Weitere Forderung:
$\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ hermitesch (Das wird später klar bei der Betrachtung der Kontinuitätsgleichung)

Explizite Darstellung der Dirac-Koeffizienten

Eine mögl. Darstellung der Matrizen ("Standard-Darstellung") ist:

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0_{2\times2} \end{pmatrix}$$

mit $0_{2\times2}$: 2x2 Matrix mit Null-Einträge

$\hat{\sigma}^i$ $(i=1,2,3)$: Pauli-Spinmatrizen (2x2)

mit $\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

es gilt: $(\hat{\sigma}^i)^2 = \underline{\underline{1}}_{2\times2}$, $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]_+ = 0$, $\hat{\sigma}_i^+ = \hat{\sigma}_i$ hermitesch

Eigenwerte ± 1

außerdem:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}}_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -\underline{\underline{1}}_{2\times2} \end{pmatrix}$$

Erinnerung zum Thema Pauli-Spinmatrizen

Drehimpulse: $\hat{l}$

Eigenwertgleichung

$$\hat{l}^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$$
$$\hat{l}_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle$$

$[\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0$

$m = -l, \dots, l$ (ganzzahlige Schritte)

Gilt für alle Arten von Drehimpulsen! Bahndrehimpulse, Spin

außerdem: $\hat{l}_x = \frac{1}{2}(\hat{l}_+ + \hat{l}_-)$

$\hat{l}_y = \frac{1}{2i}(\hat{l}_+ - \hat{l}_-)$

Leiteroperatoren

$$\hat{l}_+ |l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$$
$$\hat{l}_- |l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,|l,m-1\rangle$$

Die Pauli-Spin-Matrizen sind die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ für $l = \frac{1}{2}$ in den $\underbrace{\text{Zuständen}}_{\text{entsprechend}}$ $|l, m\rangle$

$$\Longrightarrow \underbrace{\langle l, m | \hat{l}_i | l, m\rangle}_{\text{Matrixelemente}} \quad \text{mit } i = x, y, z \text{ und } l = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Man erhält:

$$\hat{l}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^1$$

$$\hat{l}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^2$$

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^3$$

$$\left(\hat{\sigma}^i\right)^+ = \hat{\sigma}^i$$

hermitesch

Zurück zum Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c\,\underline{\hat{\alpha}} \cdot \underline{\hat{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2$$

$$\boxed{\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & -\underline{1} \end{pmatrix}}$$

Einsetzen der Standard-Darstellung für $\underline{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$ und $\hat{\beta}$

$$\Rightarrow \hat{H}_D = c\left(\hat{\alpha}^1 \hat{p}_1 + \hat{\alpha}^2 \hat{p}_2 + \hat{\alpha}^3 \hat{p}_3\right) + \hat{\beta} m_0 c^2$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} m_0 c^2 & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + ip_y) & -cp_z \\ \hline cp_z & c(p_x - ip_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + ip_y) & -cp_z & 0 & -m_0 c^2 \end{array}\right)$$

4×4 Matrix, die der Standard-Darstellung von $\hat{H}_D$ entspricht

Dirac-Gleichung in kovarianter Form

Erinnerung: Die Dirac-Gl. $i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} = \hat{H}_D \underline{\Psi}$ (*)

ist eine DGL erster Ordnung in der Zeit <u>und</u> im Raum ($\hat{p}$ geht nur linear ein!)

$\Rightarrow$ Raum-Zeit-Symmetrie bzgl. der Ableitungen ist schon mal gewährleistet!

Kovariante Form:

multipliziere dazu die Dirac-Gl. (*) mit $\frac{1}{c}\hat{\beta}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{1}{c}\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi} - \frac{1}{c}\hat{\beta}\hat{H}_D\underline{\Psi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c}\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c}\hat{\beta}\left(c\,\underline{\hat{\alpha}}\cdot\underline{\hat{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\right)\underline{\Psi} = 0$$

benutze: $\underline{\hat{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla$, $\quad \hat{\beta}^2 = \underline{\underline{1}}$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$\mu = 0,1,2,3$

$$\Rightarrow \left(i\hbar\hat{\beta}\partial_0 + i\hbar\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i - m_0 c \mathbb{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad (-1)$$

$i = 1,2,3$

$$\left(-i\hbar\left(\hat{\beta}\partial_0 + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i\right) + m_0 c \mathbb{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad (**)$$

Definiere nun die neuen Dirac-Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta}$$
$$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$$

4 Matrizen $\mu = 0,1,2,3$, sie bilden zusammen den 4-Vektor $\underline{\hat{\gamma}}$ (die Einträge sind wieder 4×4 Matrizen)

aus (**)

$$\left(-i\hbar\left(\hat{\gamma}^0\partial_0 + \hat{\gamma}^i\partial_i\right) + m_0c\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad \Big| :\hbar$$

$$\Rightarrow \left(-i\,\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu + \frac{m_0c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3$$

Verkürzte Schreibweise (Feynman)

$$\cancel{\partial} = \hat{\gamma}^\mu\partial_\mu$$ (Skalarprodukt aus dem Vektor $\hat{\gamma}$ und dem kovarianten Ableitungsvektor)

$$\boxed{\left(-i\cancel{\partial} + \frac{m_0c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0}$$

Kovariante Form der Dirac-Gleichung

Kontinuitätsgleichung in der Dirac-Theorie

Zurück zur "alten" Form der Dirac-Gl.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi} = \hat{H}_D\underline{\Psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c\hat{\alpha}^i\hat{p}_i + \hat{\beta}m_0c^2$$

multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor (Zeilenvektor)

$$\underline{\Psi}^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$$

$$\Rightarrow i\hbar\,\underline{\Psi}^+\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} = c\,\underline{\Psi}^+\hat{\alpha}^i\hat{p}_i\underline{\Psi} + m_0c^2\,\underline{\Psi}^+\hat{\beta}\underline{\Psi} \qquad (1)$$

Nehme nun die adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit $\underline{\Psi}$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}^+ = c\left(\hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\Psi}\right)^+ + m_0 c^2 \left(\hat{\beta}\underline{\Psi}\right)^+$$
$$= c\left(\hat{p}_i \underline{\Psi}\right)^+ \left(\hat{\alpha}^i\right)^+ + \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ m_0 c^2$$

$$\boxed{(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+}$$

$$\Rightarrow -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}^+\right)\underline{\Psi} = c\left(\hat{p}_i \underline{\Psi}\right)^+ \hat{\alpha}^{i+} \underline{\Psi} + \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\Psi}\, m_0 c^2 \qquad (2)$$

Bilde (1) − (2)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\Psi}^+ \underline{\Psi}\right) = c\left(\underline{\Psi}^+ \hat{\alpha}_i \hat{p}_i \underline{\Psi} - \left(\hat{p}_i \underline{\Psi}\right)^+ \left(\hat{\alpha}^i\right)^+ \underline{\Psi}\right)$$
$$+ m_0 c^2 \left(\underline{\Psi}^+ \hat{\beta} \underline{\Psi} - \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\Psi}\right)$$

ersetze $\hat{p}_i \to \frac{\hbar}{i}\partial_i$

$$\left(\hat{p}_i \underline{\Psi}\right)^+ = -\frac{\hbar}{i}\partial_i \underline{\Psi}^+$$

benutze $(a\hat{A})^+ = a^* \hat{A}^+$

und benutze dass $\hat{\alpha}_i$ ortsunabhängig

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\Psi}^+ \underline{\Psi}\right) = c\frac{\hbar}{i}\left(\underline{\Psi}^+ \hat{\alpha}^i \partial_i \underline{\Psi} + \partial_i \underline{\Psi}^+ \left(\hat{\alpha}^i\right)^+ \underline{\Psi}\right)$$
$$+ m_0 c^2 \underbrace{\left(\underline{\Psi}^+ \hat{\beta} \underline{\Psi} - \underline{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ \underline{\Psi}\right)}$$

Fordere nun (mit Blick auf die Konstruktion einer Kontinuitätsgleichung), dass ~~...~~ $\left(\hat{\alpha}^i\right)^+ = \hat{\alpha}^i$, $\hat{\beta}^+ = \hat{\beta}$ (hermitesch!)

Dann hebt sich der letzte Term heraus

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\Psi}^+\underline{\Psi}\right) = -c\,\partial_i\left(\underline{\Psi}^+\hat{\alpha}^i\underline{\Psi}\right)$$

Das hat genau die Form einer Kontinuitätsgleichung!!

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \text{mit} \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$$

kovariant

j^μ Viererstrom mit $j^0 = c\rho$ und $\rho = \underline{\Psi}^+\underline{\Psi}$

$j^i = c\,\underline{\Psi}^+\hat{\alpha}^i\underline{\Psi}$

räumliche Komponente

Konkret:

$$\rho = \underline{\Psi}^+\underline{\Psi} = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2 \geq 0$$

erlaubt Interpretation als echte Wahrscheinlichkeitsstromdichte!

$\underline{j} = c\,\underline{\Psi}^+\underline{\hat{\alpha}}\,\underline{\Psi}$ Wahrscheinlichkeitsstromdichte