

Dirac-Gl. für freien Teilchen, Lösungen:

Charakterisierung durch drei Quantenzahlen: \bullet p Impuls (Vankindheit)

\bullet Energie-Quantenzahl $\lambda = \pm 1$

$$E_{\lambda}(p) = \lambda c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (\text{jeder davon ist zweifach entartet!})$$

\bullet $m_s (\hat{=} \epsilon) = \pm \frac{1}{2}$

Eigenwerte des Helizitätsoperators

Zu jedem E_{λ}, ϵ gibt es jeweils zwei Einheitslösungen des Spins bezgl. der Richtung von p

$$[\hat{H}_D, \hat{p}] = 0$$

$$\hat{\Lambda} = \hat{S} \cdot \frac{p}{p}$$

$$[\hat{H}_D, \hat{\Lambda}] = 0, [\hat{\Lambda}, \hat{p}] = 0$$

Dirac-Spinoperatoren

Eigenwerte in Impulsrichtung

\Rightarrow vollständige Satz kommutierender Observablen!

aufpassen: $[\hat{H}_D, \hat{S}] \neq 0$

$[\hat{H}_D, \hat{L}] \neq 0$

aber $[\hat{H}_D, \hat{L} + \hat{S}] = 0$

Behandlungsimpuls

(hier ohne Beweis)

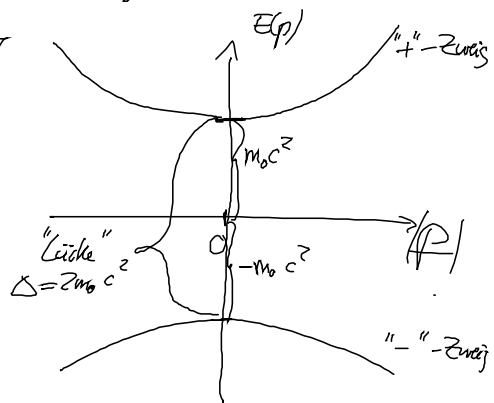
Spinrotationsimpuls

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

Bemerkung zum Energiespektrum

Wir haben gesehen: Wie auch bei der Klein-Gordon-Gl. gibt es bei der Dirac-Gl. Lösungen mit positiver und negativer Energie

$$E_{\lambda} = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$



Können wir die Lösung mit negativer Energie ignorieren?

Ergänzt nicht, denn:

Ein beliebiges Spinor, der die Dirac-Gl. löst, ist Überlagerung der m_0 -Basis-Spinoren und enthält damit i.A. auch Anteile mit negativer Energie!

Illustration des "Energiespektrums"

Außerdem:

Selbst wenn der Anfangszustand ($t=0$) positive Energie hat, könnte es durch Wechselwirkung mit Strahlung Übergänge in Zustände mit negativer Energie geben
 \Leftrightarrow Atome (Kerns) wären nicht stabil ... ?

Das wird aber nicht beobachtet!

"Erklärung" durch den Dirac-See

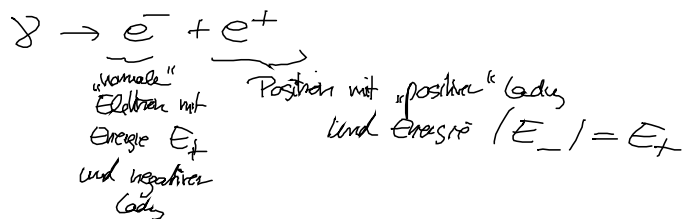
Im "Grundzustand" des Systems sind alle Zustände mit negativer Energie vollständig besetzt ("Dirac-See", Vakuumzustand)

Wegen des Pauli-Prinzips können Teilchen mit positiver Energie dann nicht in Zustände negativer Energie übergeln

(Pauli-Prinzip: Für Fermionen ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) kann jeder Zustand nur einfach besetzt werden!)

Was man aber beobachten kann:

Durch ein Lichtquant (γ -Quant) mit Energie $\hbar\omega$, klappt $\frac{\hbar\omega}{2}$ kann man ein Elektron mit negativer Energie (und umgekehrtes Ladung!) zusammen mit einem neuen "normalen" Elektron erzeugen

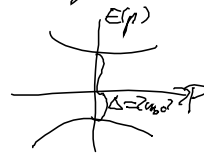


Idee: Das γ -Quant schlägt ein "Loch" in den Dirac-See.

Der resultierende Zustand hat im Vergleich zum Grundzustand positive Ladung und positive Energie \Rightarrow "Positron" ("Antiteilchen" des Elektrons!)

Abschließende Bemerkungen

- Energieerhaltung des Paarzeugungprozesse $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ hw muss mindestens $2mc^2$ sein!
(hw $\geq \Delta E = 2mc^2$)
- Man stößt an diese Überlegung:
 Dirac-Theorie ist eigentlich Vielteilchentheorie
 ('Pauli-Prinzip wäre ausgesetzt invariant!')
- Adäquate Beschreibung gibt erst nach Quantisierung des "Dirac-Feldes"
 (Quantenfeldtheorie)
- Will man an der Einheitsinterpretation festhalten, so muss man sich auf den E_+ -Zweig festlegen (und den E_- -Zweig ignorieren!)
 (ok., da Zustände mit positiver Energie nicht in E_- -Zustände übergehen können!)
Pauli-Prinzip



I.3. Nichtrelativist. Grenzfall

Motivation:

Wesentliche Phänomene aus dem Bereich der Spektroskopie, Spin-Bahn-Kopplung können bereits im Rahmen einer Störungstheorie für relativist. Effekte verstanden werden!

Ausgangspunkt:

Dirac-Gl. im elektromagnetischen Feld

$\hat{=}$ in Anwesenheit der Potentiale $\Phi(\underline{r}, t)$ (skalares Potential), $\underline{A}(\underline{r}, t)$ (Vektorpotential)

Ersatz dazu wie bei der Klein-Gordon-Gl. (und analog bei der Schrödinger-Gl., klass. Hamilton-Herleitung)

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \frac{q}{c} \underline{A} \quad , \quad q \text{ Ladung}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\Phi \quad (\text{bzw. } H \rightarrow H - q\Phi)$$

⇒ Dirac-Gl. im elektromagnet. Feld

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(c \underline{\alpha} \cdot (\hat{p} - \frac{q}{c} \underline{A}) + \hat{\beta} m_0 c^2 + q\phi \right) \psi} \quad (*)$$

Umformen von (*):

- definiere dazu $\hat{\Pi} = \hat{p} - \frac{q}{c} \underline{A}$

- verbinde für $\underline{\alpha}, \hat{\beta}$ wieder die Standarddarstellung, also $\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}$

- Ansatz für ψ : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ Zweikomponentige Vektoren
verknüpfen

$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$

Einsetzen in (*)

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} & \\ & \hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}}$$

(**) Dabei ist $\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} = \hat{\sigma}_1 \hat{\Pi}_1 + \hat{\sigma}_2 \hat{\Pi}_2 + \hat{\sigma}_3 \hat{\Pi}_3$
 2x2 Matrix

Ziel: Verständnis des nicht-relativistischen Grenzfalls

Idee: In diesem Grenzfall ist

$$E' = E_+ - m_0 c^2 \quad \text{Klein}$$

$$= m_0 c^2 \sqrt{\frac{p^2}{m_0^2 c^2} + 1} - m_0 c^2$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2} + \dots \right) - m_0 c^2 \approx \frac{p^2}{2m_0}$$

Erinnere $\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t}$
 Zeitabhängigkeit

Annahme:

$$\frac{p^2}{m_0^2 c^2} \ll 1$$

Wir spalten den Faktor $e^{-i/\hbar m_0 c^2 t}$ vom Zeitfaktor der Dirac-Lösung ab!

Schreibe also:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \sim e^{-i/\hbar E' t}$$

$\Rightarrow \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ variieren zeitlich vergleichsweise langsam!

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial t} = E' \tilde{\psi}_i \ll m_0 c^2 \tilde{\psi}_i \quad (i=1,2)$$

Das ist analog zu unserer Theorie bei den Klein-Gordon-Gl.!

Setze dies in (*) und beachte:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \right)$$

$i=1,2$

$$\xrightarrow{\text{Produktregel}} = e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 e^{-i/\hbar m_0 c^2 t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

Man erhält:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \vec{p} & \hat{\tau} \\ \hat{\sigma} \cdot \vec{p} & \hat{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

Bis hierhin noch alles exakt!!

a) Einfachste Näherung, führt auf Herleitung der Pauli-Gleichung

~~Annahme:~~ Annahme:

$$q\phi \tilde{\psi}_2 \ll 2m_0 c^2 \tilde{\psi}_2$$

Idee: Ruheenergie dominiert alles!

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t}} \ll 2m_0 c^2 \hat{\varphi}$$

Näherung: Setze diese Terme zu Null !!

Die zweite Gleichung aus (*) vereinfacht sich zu

$$0 = c \hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}} \hat{\varphi}_1 - 2m_0 c^2 \hat{\varphi}_2$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}_2 = \frac{\hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}}}{2m_0 c} \hat{\varphi}_1$$

Beachte $\hat{\underline{\Pi}} \sim \hat{\underline{p}} - q_c \underline{A}$ und $\hat{\underline{p}} \sim \underline{v}$ (Geschwindigkeit)

Die obige Gleichung impliziert also, dass $\hat{\varphi}_2$ um eine Faktor $\frac{v}{c}$ kleiner ist als $\hat{\varphi}_1$ (" $\hat{\varphi}_2$ ist der langsamere Komponente")

Wir setzen nun das Ergebnis für $\hat{\varphi}_2$ in die Gleichung ein, die sich (*) für $\hat{\varphi}_1$ ergibt!

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial t} = \frac{(\hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}})^2}{2m_0} \hat{\varphi}_1 + q_c \Phi \hat{\varphi}_1$$

Wir haben effektiv also nun noch eine Gleichung für den Zweikomponenten $\hat{\varphi}_1$ ("schnellere" Komponente des Spinors) erhalten!

Nach zu berechnen:

$$(\hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}})^2 \quad \text{mit} \quad \hat{\underline{\Pi}} = \hat{\underline{p}} - q_c \underline{A}$$

$$\text{es gilt: } \hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}} = \hat{G}_1 \hat{\Pi}_1 + \hat{G}_2 \hat{\Pi}_2 + \hat{G}_3 \hat{\Pi}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3 & \hat{\Pi}_1 - i\hat{\Pi}_2 \\ \hat{\Pi}_1 + i\hat{\Pi}_2 & -\hat{\Pi}_3 \end{pmatrix}$$

Man findet (wie durch Beweis)

$$(\hat{\underline{G}} \cdot \hat{\underline{\Pi}})^2 = \hat{\underline{\Pi}}^2 \hat{1} + i \hat{\underline{G}} \cdot (\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}})$$

$$\text{mit } \hat{\underline{\Pi}}^2 = \hat{\Pi}_1^2 + \hat{\Pi}_2^2 + \hat{\Pi}_3^2$$

$$\text{und } i \hat{\underline{G}} \cdot (\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}}) = i \hat{G}^1 (\hat{\Pi}_2 \hat{\Pi}_3 - \hat{\Pi}_3 \hat{\Pi}_2)$$

$$-i \hat{G}^2 (\hat{\Pi}_3 \hat{\Pi}_1 - \hat{\Pi}_1 \hat{\Pi}_3)$$

$$+i \hat{G}^3 (\hat{\Pi}_1 \hat{\Pi}_2 - \hat{\Pi}_2 \hat{\Pi}_1)$$

(paarige Vertauschen)
 $-i \hat{G}^2 \rightarrow +i \hat{G}^2$

$$= i \hat{G}^1 [\hat{\Pi}_2, \hat{\Pi}_3] - i \hat{G}^2 [\hat{\Pi}_3, \hat{\Pi}_1]$$

$$+ i \hat{G}^3 [\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2]$$

Einsetzen in die Gl. für $\hat{\underline{\Psi}}_1$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\underline{\Psi}}_1 = \frac{1}{2m_0} \hat{\underline{\Pi}}^2 \hat{\underline{\Psi}}_1 + \frac{i}{2m_0} \hat{\underline{G}} \cdot (\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}}) \hat{\underline{\Psi}}_1 + q \phi \hat{1} \hat{\underline{\Psi}}_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\underline{\Psi}}_1 = \left(\frac{1}{2m_0} \hat{\underline{\Pi}}^2 + q \phi \hat{1} \right) \hat{\underline{\Psi}}_1 + \frac{i}{2m_0} \hat{\underline{G}} \cdot (\hat{\underline{\Pi}} \times \hat{\underline{\Pi}}) \hat{\underline{\Psi}}_1}$$

Sieht schon aus wie bei der
 Schrödinger-Gl. eines Teilchens im elektromagnet.
 Feld, nur dass $\hat{\underline{\Psi}}_1$ Zweikomponentig

„relativistische Korrekturen“