

System von  $f$  klassischen Oszillatoren

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T I \dot{q} - \frac{1}{2} q^T V q$$

Lagrange funktion  $\rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \omega_i^2 Q_i^2$  entkoppelt

$$q = A Q$$

Normalmoden  
"Normal schwingungen"  
"Kollektive Schwingungen"  
(Phononen)

Hamiltonfunktion:  $H = \sum_{i=1}^f \underbrace{Q_i \frac{\partial L}{\partial Q_i}}_{P_i \text{ Kanonisch Impuls}} - L$

$$\rightarrow H = \sum_{i=1}^f \left( \frac{1}{2} P_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 Q_i^2 \right)$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad \text{fundamentale Poisson Klammern}$$

Kanonisch Variablen!

Korrespondenzprinzip  $Q_i \rightarrow \hat{Q}_i, P_j \rightarrow \hat{P}_j$

mit  $[\hat{Q}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij}$

$\rightarrow$  Hamiltonoperator: 
$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f (\hat{P}_i^2 + \omega_i^2 \hat{Q}_i^2)$$

Das sind  $f$  quantenmechanische harmonische Oszillatoren, voneinander entkoppelt!

Lösungsweg bekannt!

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^f \underbrace{\hbar \omega_i \left( \hat{N}_i + \frac{1}{2} \right)}_{\hat{H}_i} = \sum_{i=1}^f \hat{H}_i$$

mit  $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  mit  $\hat{a}_i = \sqrt{\frac{\omega_i}{2\hbar}} \hat{Q}_i + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_i}} \hat{P}_i$

Kannichsen-  
operator  
(Absenken)

$$\hat{a}_i^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_i}{2\hbar}} \hat{Q}_i - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_i}} \hat{P}_i$$

Erzeugungs-  
operator  
(Aufsteigen)

mit  $[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \delta_{ii}$

also "bosonische" Vertauschungsrelation  
(s. Kap II)

Eigenzustände:

$$\hat{H}_i |n_i\rangle = E_i |n_i\rangle$$

mit  $|n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle_i$

Vakuumzustand zum Oszillator  $i$

und  $E_i = \hbar \omega_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right)$

### Interpretation:

- Der Eigenzustand  $|n_i\rangle$  jedes Oszillators, der durch  $n$ -faches Anwenden von  $\hat{a}_i^\dagger$  auf  $|0\rangle$  resultiert, heißt  $n$ -Phonon Zustand
- Wir fassen also den Hilbertraum jedes Oszillators als (bosonischen) Fockraum auf
- Die hier vorkommenden Bosonen sind keine echte Teilchen, sondern kollektive Anregungen (Quantenzustände, Phonon)
- Die Interpretation als System von Quantenteilchen ist konsistent mit der Tatsache, dass die Energien  $E_i$  immer ganzzahlige Vielfache der Eigenfrequenz  $\omega_i$  erhöhen

### - Gesamtsystem:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^f \hat{H}_i \quad \text{diagonalisiert durch Frequenz } \omega_i$$

Da entkoppelt, sind die Eigenzustände von  $\hat{H}$  Produktzustände

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_1, \dots, n_f\rangle &= E(n_1, \dots, n_f) |n_1, n_2, \dots, n_f\rangle \\ \text{mit } |n_1, \dots, n_f\rangle &= |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_f\rangle \\ \text{und } E(n_1, \dots, n_f) &= \sum_{i=1}^f E_i = \sum_{i=1}^f \hbar \omega_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

### - Speziell Festkörper (Phonon)

Ersetzt die Summe  $\sum_{i=1}^f$  durch die Summe über alle zulässigen Wellenvektoren  $\underline{k}$  und "Zweigindex"  $s$

$$\Rightarrow \hat{H}_{\text{Phonon}} = \sum_{\underline{k}, s} \hbar \omega_s(\underline{k}) \left( \hat{a}_{\underline{k}, s}^\dagger + \hat{a}_{\underline{k}, s} + \frac{1}{2} \right)$$

### Zum Zweigindex:

Es gibt akustische Moden ( $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) = 0$ ) und optische Moden ( $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) \neq 0$ )

In 3-dim. Kristallen mit  $p$  Atomen pro Gitterzelle gibt es zu jedem  $\underline{k}$  insgesamt  $3p$  Moden:  
3 akustische Moden und  $(3p-3)$  optische Moden

## IV. 2. Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

### Klassische Beschreibung des elektromagnet. Feldes

Maxwell-Gleichung (hier in SI)

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\rho \text{ Ladungsdichte}) \quad , \quad \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \quad (\text{Induktionsspannung})$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} + \mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

← Strömigkeit

mit  $\underline{E} = \underline{E}(\underline{r}, t)$  ,  $\underline{B} = \underline{B}(\underline{r}, t)$

(Wir betrachten keine materialistische Beschreibung der Materie  
 → keine Polarisation- oder Magnetisierungsfelder  
 →  $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$  ,  $\underline{H} = (\mu_0^{-1}) \underline{B}$ )

Umschreiben der Maxwell-Gl. als Potentialgleichung

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$$

mit  $\underline{A}(\underline{r}, t)$  Vektorpotential

$\phi(\underline{r}, t)$  skalares Potential

Einsätzen:

$$\Delta \phi + \nabla \cdot \dot{\underline{A}} = -\frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$$

trivial, da  $\text{div rot} = 0$

Null, da  $\text{rot grad} = 0$

$$\nabla \times (-\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \frac{1}{c^2} (-\nabla \ddot{\phi} - \ddot{\underline{A}}) + \mu_0 \underline{j}$$

Umschreiben der letzten Gl. mit  $\nabla \times (\nabla \times \dots) = \nabla (\nabla \cdot \dots) - \Delta \dots$

$$\nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A} = \frac{1}{c^2} (-\nabla \ddot{\phi} - \ddot{\underline{A}}) + \mu_0 \underline{j}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} + \nabla (\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}) &= \underline{\mu_0 j} \\ \text{außerdem } \Delta \Phi + \nabla \cdot \dot{\underline{A}} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \textcircled{*}$$

Entkopplung durch Eichtransformation:  $\underline{A} \rightarrow \underline{A} + \nabla \chi$   
 $\Phi \rightarrow \Phi - \dot{\chi}$  } skalar. Funkt.  $\chi(\underline{r}, t)$  löst  $\underline{E}, \underline{B}$  invariant

### Lorentz-Eichung

wähle  $\chi(\underline{r}, t)$  so, dass gilt:  $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0$

$$\begin{aligned} \text{aus } \textcircled{*} \Rightarrow -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} &= \underline{\mu_0 j} \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} &= -\frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Das ist eine relativistische Variante  $\underline{E}$ -Gleichung  
 ( $\rightarrow$  behandelt in Kap I der Vorlesung)

Raum- und Zeitabh. auf gleicher Stufe

### Coulomb-Eichung

wähle  $\chi(\underline{r}, t)$  so, dass  $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = 0$

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} + \frac{1}{c^2} \nabla \dot{\Phi} &= \underline{\mu_0 j}(\underline{r}, t) \\ \Delta \Phi &= -\frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Wir beschäftigen jetzt zunächst auf den Fall  $\rho = 0, j = 0$

Kavie (mit Lorentz-.) Ladung, Kavie Strom

$$\Rightarrow \Delta \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\underline{r}, t) \approx \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = 0$$

Das Potential  $\Phi$  ist immer Null !!

Kavie Retardierung!

$\Rightarrow$  Die alleine relevante Gleichung ist:

$$-\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$$

Lösung:  
Ansatz

Entwickelung nach "Eigenmoden"

Vektoren

$$A(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}} \left( \frac{1}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + a_{\underline{k}}^* \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{i\omega_{\underline{k}} t} \right)$$

Vorfaktoren (zahlen im klass. Fall)

Idee dahinter: wir interessieren für Vektorpotential  $\underline{A}$  innerhalb eines feste Raumgebiets ("Kavität").  $\underline{A}$  soll auf dem Rand des Gebiets verschwinden.

Welche Bedingung zu (\*\*)

- Damit (\*\*) die Coulombbedingung erfüllt, muss gelten (auch alleine für Real- bzw. Imaginärteil!)

$$\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0, \text{ damit auch } \nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) = 0$$

häufig spricht man von "transversalen" Moden.

nehme an, dass  $\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim \underline{c} e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$  (oder Überlagerung davon)

Konten

$$\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \sim \underline{k} \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \underline{u}_{\underline{k}}$  und  $\underline{k}$  müssen senkrecht aufeinander stehen!  
"transversal"

- (\*\*) setzt Entwicklung in ein vollständiges Orthonomalsystem darstellbar

$$\int_{\mathcal{G}} d\underline{r} \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r}) = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$$

$\mathcal{G}$  - interessantes Raumgebiet (Kavität)

- Bestimmung der Frequenz  $\omega_{\underline{k}}$  in (\*\*):

Setze (\*\*) in die gl.  $-\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$

$$-\sum_{\underline{k}} \left( \frac{1}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\underline{k}} \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + a_{\underline{k}}^* \Delta \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{i\omega_{\underline{k}} t} \right)$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_{\underline{u}} \left( \frac{\hbar}{2m_{\underline{u}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\underline{u}} u_{\underline{u}}(\underline{r}) (-i\omega_{\underline{u}})^2 e^{-i\omega_{\underline{u}} t} + a_{\underline{u}}^* u_{\underline{u}}^*(\underline{r}) (i\omega_{\underline{u}})^2 e^{i\omega_{\underline{u}} t} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Da soll für jedes  $\underline{u}$  und unabhängig für Real- und Imaginärteil gelten!

$$\Rightarrow \left[ \Delta u_{\underline{u}}(\underline{r}) + \frac{\omega_{\underline{u}}^2}{c^2} u_{\underline{u}}(\underline{r}) = 0 \right]$$

Frage nun:

Wie lautet der Hamiltonoperator zum elektromagnet. Feld?

Zunächst speziell für den Fall  $\rho=0, \mathbf{j}=0$ ?

Hier auf Basis des klass. Ausdrucks für die Energiedichte!

(später: Herleitung über Lagrange dichte)

klass. Elektrodynamik

$$\text{Energie: } E = \int d\underline{r} \underbrace{\epsilon(\underline{r}, t)}_{\text{Energiedichte}} = \int d\underline{r} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(\underline{r}, t))^2 \right)$$

hier:  $\underline{E}(\underline{r}, t) = -\dot{\underline{A}}$  (da  $\phi=0$  in der Gaugebedingung)  
 $\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}$

Benutze unseren Ansatz für  $\underline{A}(\underline{r}, t)$

klass. Ortsargument (nd weg)

$$\Rightarrow \underline{E} = -\dot{\underline{A}} = \sum_{\underline{u}} \left( \frac{\hbar}{2m_{\underline{u}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( i\omega_{\underline{u}} a_{\underline{u}} u_{\underline{u}} e^{-i\omega_{\underline{u}} t} - i\omega_{\underline{u}} a_{\underline{u}}^* u_{\underline{u}}^* e^{i\omega_{\underline{u}} t} \right)$$

$$= i \sum_{\underline{u}} \left( \frac{\hbar \omega_{\underline{u}}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\underline{u}} u_{\underline{u}} e^{-i\omega_{\underline{u}} t} - a_{\underline{u}}^* u_{\underline{u}}^* e^{i\omega_{\underline{u}} t} \right)$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = \sum_{\underline{u}} \left( \frac{\hbar}{2m_{\underline{u}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\underline{u}} (\nabla \times u_{\underline{u}}) e^{-i\omega_{\underline{u}} t} + a_{\underline{u}}^* (\nabla \times u_{\underline{u}}^*) e^{i\omega_{\underline{u}} t} \right)$$