VL Quantenmechanik II

Prof. Sabine Klapp

WS 2018/2019

Di 8:15 – 9:45

Do 8:15 – 9:45

Übungen

Alexander Carmele

Malte Selig

Javier Cerrillo

Anmeldung bei Moses

bis Mi 17.10 18.00

(Verteilung Tutorien Do 18.10)

Beginn der Übungen: Zweite VL-Woche

Ausgabe der Zettel: Do Beginn VL

Abgabe der Zettel: Do Briefkasten (2 Wochen danach)

max: 12:00 Uhr

Scheinkriterien:

- 50% Punkte auf Ü-Zettel
- Aktive Teilnahme

Abgabe in 3 – Gruppen

Quantenmechanik II (Theoretische Physik V)

Schwerpunkte

- Relativistische Quantentheorie $\cancel{\frac{p^2}{2m}}$

bisher QM für nicht-relativistische Grenzfall $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$

Spin nur postuliert Schrödinger Gleichung

jetzt Relativistische Formulierung

Klein – Gordon – Gl., Dirac – Gl., Spin

Feinstruktur des Wasserstoffatoms

- Vielteichen – Quantenmechanik
  - Systeme identischer Teilchen, Pauli-Prinzip
    (evtl. schon in der Statistische Physik, jetzt aus Sicht der QM)
  - 2. Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)
    → Moden eines Quantenteilchens
  - Näherungsmethoden für Vielteichensysteme
    (Hartree-Fock, Austausch-WW)

- Streutheorie
  - Streuung von Teilchen an Teilchen
    Lippman-Schwinger-Gleichung

0. Wiederholung: Element der QM I

a) Beschreibung des Zustands eines Systems
   (Ket-) Vektor im Hilbertraum $|\psi(t)\rangle$
   zugehöriger bra-Vektor $\langle\psi(t)|$
   (dualer Raum)

   Es gibt Skalarprodukt $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \; (= \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*)$

   normierte Zustände $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

* Ortsdarstellung $\langle \underline{r}|\psi(t)\rangle = \psi(\underline{r},t)$
"Wellenfunktion" (i.A. Komplex)

$$\left(\rho(\underline{r},t) = \right)|\psi(\underline{r},t)|^2 = \psi(\underline{r},t)\psi^*(\underline{r},t)$$
Aufenthaltswahrscheinlichkeitdichte

* Impulsdarstellung (Äquivalent)
$$\langle \underline{p}|\psi(t)\rangle = \tilde{\psi}(\underline{p},t)$$

Übergang dazwischen:

$$\langle \underline{r}|\psi\rangle = \langle \underline{r}|\hat{1}|\psi\rangle = \int d\underline{p}\, \langle \underline{r}|\underline{p}\rangle\langle \underline{p}|\psi\rangle$$

"Einschieben einer eins"

Ortsdarstellung der Impulsoperatoren Eigenfunktion

benutze $\langle \underline{r}|\underline{p}\rangle = c\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\underline{r}}$

wähle $c = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

$$\langle \underline{r}|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{p}\, \tilde{\psi}(p)\, e^{i/\hbar\, \underline{p}\underline{r}}$$

entspricht eine <u>Fouriertransformation</u> !

außerdem haben wir hier benutzt

Vollständigkeitsrelation

$$\int d\underline{p}\, |\underline{p}\rangle\langle \underline{p}| = \hat{1}, \quad \text{analog} \quad \int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}| = \hat{1}$$

(falls diskrete variablen $\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{1}$)

schließlich

Skalarprodukt im Ortsraum:

$$\langle \psi_1|\psi_2\rangle = \langle \psi_1|\hat{1}|\psi_2\rangle$$
$$= \int d\underline{r}\, \langle \psi_1|\underline{r}\rangle\langle \underline{r}|\psi_2\rangle$$
$$= \int d\underline{r}\, \psi_1^*(\underline{r})\, \psi_2(\underline{r})$$

<u>Operatoren</u>

Eigenwertproblem eines Operators (Observablen wenn Hermitesch)

$$\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$$

Eigenwerte

Eigenzustände

bei Hermitesche Operatoren (Eigenwerte sind reell)

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}$$ Vollständigkeitsrelation

$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ Orthonormal

Projektor (ket mal bra)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\, |n\rangle \quad \text{mit} \quad c_n(t) = \langle n|\psi(t)\rangle$$

b) Messungen

- Messe Observable $\hat{A}$ im Zustand $|\psi\rangle$

Ergebnis ist zufällig $\begin{cases} \text{mögliche Messwerte: } a_n \text{ (Eigenwerte von } \hat{A}) \\ \text{jedes } a_n \text{ tritt auf mit Wahrsch. } |c_n|^2 \end{cases}$

Erwartungswert
$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_n \sum_{n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{A}|n'\rangle}_{a_{n'}\delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle$$
$$= \sum_n a_n |c_n|^2$$

beachte:
Durch die Messung geht $|\psi\rangle$ in den jeweiligen EZ über
$|\psi\rangle \to |n\rangle$ Kollaps der WF

Abweichung
$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$$
$$= \langle\hat{A}^2\rangle - \underbrace{\langle\hat{A}\langle\hat{A}\rangle\rangle - \langle\langle\hat{A}\rangle\hat{A}\rangle}_{-2\langle\hat{A}\rangle^2} + \langle\hat{A}\rangle^2$$
$$= \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$$

- Messe verschiedene Observable $\hat{A}$, $\hat{B}$

sei $\Delta A = \sqrt{\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}$

dann gilt
$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle\underbrace{[\hat{A},\hat{B}]}_{\text{Kommutator}}\rangle|$$ Heisenbergsche Unschärferelation

(bekanntes Beispiel: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ Ort-Impuls)

$\Rightarrow$ Gleichzeitige <u>Scharfe</u> Messung möglich, falls Kommutator verschwindet (Beispiel: $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, Wasserstoffatom)

beachte auch:
Kommutierende Operatoren haben die selbe EZ