Dirac-Gl. $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\underline{\psi} = \hat{H}_D \underbrace{\underline{\psi}}_{\text{4-komponentiger Vektor}}$

$$\hat{H}_D = c\,\hat{\underline{\alpha}}\cdot\hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \quad , \quad \hat{\alpha}^i \ (i=1,2,3) \ : 4\times 4 \text{ Matrix}, \quad \hat{\beta} \ : \ \text{"} \ \text{"} \quad \Big\} \ \hat{H}_D \ 4\times 4 \text{ Matrix}$$

für freies Teilchen

$$\Leftrightarrow \ (*) \quad \left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\psi} = 0$$

$$\not{\partial} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu \quad \text{mit} \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \hat{\gamma}^0 = \hat{\beta}, \quad \hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$$

Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen

beachte $[\hat{H}_D, \hat{\underline{p}}] = 0$ für freies Teilchen

$\longrightarrow$ Eigenfunktionen von $\hat{\underline{p}}$ sind auch solche von $\hat{H}_D$

$$A e^{\overbrace{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}^{i\underline{k}\cdot\underline{r} \text{ mit } \underline{k} = \frac{\underline{p}}{\hbar}}} \quad \left(\text{denn } \hat{\underline{p}}\left(A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\right) \underset{\text{Ortsdarstellung}}{=} \frac{\hbar}{i}\nabla\left(A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\right)\right.$$

ebene Wellen!

$$= \underline{p}\, A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

A kann auch von $\underline{p}$ und E abhängen

Ansatz für Spinor:
$$\boxed{\underline{\psi}(\underline{r},t) = \underline{\psi}^0(E,\underline{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$$

Einsetzen in $(*)$

$$\left(-i\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\psi} = 0$$

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrix

$$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \hat{\beta}\begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

beachte: $\quad \partial_0 \underline{\psi} = \frac{1}{c}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)E\underline{\psi}$

$$\partial_i \underline{\psi} = \frac{i}{\hbar}\underbrace{p_i}_{\text{Impulskomponente, kein Operator}}\underline{\psi}$$

setze $\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ mit $\underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

man findet:

$$-\frac{1}{c\hbar} E \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{aus Produkt } \hat{\gamma}^i p_i} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

explizit: $\hat{\underline{\sigma}}\,\underline{p} = \hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3$ 2x2 Matrix

$$E \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}}\,\underline{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

ausschreiben $\longrightarrow$ lineares Gleichungssystem

$$(1) \quad E\underline{\varphi}_1 = c\,\hat{\underline{\sigma}}\,\underline{p}\,\underline{\varphi}_2 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_1$$

$$(2) \quad -E\underline{\varphi}_2 = -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\underline{\varphi}_1 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_2$$

$$\begin{pmatrix} (E - m_0 c^2)\hat{1} & -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \\ -c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & (E + m_0 c^2)\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Bemerkung: Dasselbe Gl.-System würde man erhalten wenn man direkt $\hat{H}_D$ diagonalisiert

Damit (*) eine Lösung hat, muß die Koeffizientendeterminante verschwinden!

$$(E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2)\,\hat{1} - c^2 (\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p})(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}) = 0$$

benutze (hier ohne Beweis)

$$(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p})(\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}) = p^2\,\hat{1}$$

$$\Rightarrow (E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 p^2 = 0 \Rightarrow \boxed{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p^2 = 0}$$

Hier taucht also wieder die relativist. Energie-Impuls-Relation auf!
Das war erwartet, da wir $\hat{H}_D$ gerade so konstruiert haben!

$\Rightarrow$ Es gibt also zwei mögliche Energiewerte ($\hat{=}$ Eigenwerten von $\hat{H}_D$)

$$E_\lambda(p) = \lambda c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad \text{mit } \lambda = \pm 1$$

Beachte: Jeder dieser Eigenwerte E_+, E_- ist zweifach entartet, da die Gl.-(*) ein 4×4-System ist

Außerdem aus (*): Beziehungen zwischen den 2-Vektoren $\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$

$$(E_\lambda - m_0 c^2)\underline{\varphi}_1 - c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot \underline{p}\,\underline{\varphi}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi}_1 = \frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_\lambda - m_0 c^2}\,\underline{\varphi}_2 \quad (a)$$

und $$-c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}\,\underline{\varphi}_1 + (E_\lambda + m_0 c^2)\underline{\varphi}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi}_2 = \frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\underline{\varphi}_1 \quad (b)$$

Wir fordern, dass unsere Lösung auch den Fall $p=0$ (ruhendes Teilchen) vernünftig beschreibt. In diesem Fall gilt $E_\lambda = \lambda c\sqrt{m_0^2 c^2} \Rightarrow E_+ = m_0 c^2$, $E_- = -m_0 c^2$

Wir wählen daher zur Beschreibung des Falles $\lambda = 1$ die Relation (b) und für $\lambda = -1$ die Relation (a)
Die vier resultierenden Vektoren sollen orthogonal sein

$\Rightarrow$ Gesamtwellenfunktion für den Fall $\lambda = 1$

$$\underline{\Psi}_{\underline{p},\underbrace{\lambda}_{+1}}(\underline{r},t) = \underbrace{N}_{\text{Normierungsfaktor}} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_{+1}(p)t - \underline{p}\cdot\underline{r}\right)}$$

Man sieht:
Vierervektor, jede Komponente entspricht einer ebenen Welle (mit Vorfaktor)

Beachte: Der 2-Vektor $\underline{\varphi}_1$ ist noch unbestimmt!

Zur endgültigen Festlegung von $\underline{\varphi}_1$ macht man folgende Überlegungen

a) der gesamte Spinor $\underline{\Psi}$ soll normiert sein (Wichtig für die Interpretation von $\underline{\Psi}^+\underline{\Psi}$ als Wahrsch.dichte)

b) $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$ sind Zweiervektoren

$\rightarrow$ kann dargestellt werden bezgl. der Basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Einheitsvektoren im 2-dim. Raum

Führe ein: $\underline{\chi}_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 1, 2$

$$\underline{\chi}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \underline{\chi}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gesamtspinor für den Fall $\lambda = 1$

$$\underline{\Psi}_{\underline{p},\lambda,\varepsilon}(\underline{r},t) = N \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\varepsilon \\ \frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\,\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\,\underline{\chi}_\varepsilon \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_\lambda(p)t - \underline{p}\cdot\underline{r}\right)}$$

N wird berechnet aus $\underline{\Psi}^+\underline{\Psi} = N^2\left(1 + \left(\frac{c\,\hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p}}{E_+ + m_0c^2}\right)^2\right) \overset{!}{=} 1$

Damit ist die Konstruktion der Lösung der Dirac-Gl. für das freie Teilchen zunächst fertig!

Bemerkungen

a) Lösungen sind ebene Wellen, die durch drei "Quantenzahlen" charakterisiert sind:

- Impuls $\underline{p}$ (kontinuierlich)
- Energiequantenzahl $\lambda = \pm 1$ (für jedes $\underline{p}$)
  (zwei "Energiezweige")
- Quantenzahl ε, die für jedes λ zwei Werte annehmen kann
  $\varepsilon = 1, 2$

b) Die Spaltenvektoren zu festem $\underline{p}$ sind orthogonal zueinander

c) Explizit:

$$\Psi_{p,+1,\varepsilon=1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_+ t - p \cdot r)}$$

benutze dazu $\hat{\sigma} \cdot p = \ldots = \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}$

$$\Psi_{p,+1,\varepsilon=2} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{-c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{\text{"}}$$

$$\Psi_{p,-1,\varepsilon=1} = N \begin{pmatrix} \frac{-c p_z}{-E_- + m_0 c^2} \\ \frac{-c(p_x + i p_y)}{-E_- + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i/\hbar (-E_- t + p \cdot r)}$$

$$\Psi_{p,-1,\varepsilon=2} = N \begin{pmatrix} \frac{-c(p_x - i p_y)}{-E_- + m_0 c^2} \\ \frac{c p_z}{-E_- + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\text{"}}$$

d) Ein allgemeiner Spinor (für das freie Teilchen) entspricht einer Überlagerung dieser 4 ~~Basislösungen~~ Basis-Lösungen

$$\Psi = \sum_{p,\lambda,\varepsilon} c_{p,\lambda,\varepsilon} \Psi_{p,\lambda,\varepsilon}$$

Dirac-Gl. ist linear!!

e) Die $\Psi_{p,\lambda,\varepsilon}$ sind Eigenfunktionen zum

- Impulsoperator $\hat{p}$ (Quantenzahl p)
- Dirac-Hamiltonian $\hat{H}_D$ (Quantenzahl λ, Energieeigenwert $E_\lambda(p)$)
- "Weiterer Operator" (noch unbekannt) (Quantenzahl ε)

Idee: die drei Operatoren bilden ein vollständige Satz kommutierender Observable
(ähnl. wie beim H-Atom: $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$, $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
$\Rightarrow$ Quantenzahlen n, l, m

Frage: Was ist der weitere Operator?

f) Antwort: Der gesuchte Operator ist $\hat{\Lambda}$ großes Lambda

$$\underbrace{\hat{\Lambda}}_{\text{Helizitätsoperator}} = \underbrace{\hat{\underline{S}}}_{\text{Dirac'scher Spinoperator}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{p}}{|\underline{p}|}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung des Impulses } \underline{p}}$$

$\hat{\Lambda}$ ist die Projection von $\hat{\underline{S}}$ auf die Richtung des Impulses ($\Leftrightarrow$ Ausbreitungsrichtung der Welle)

$$\hat{\underline{S}} = (\hat{S}^1, \hat{S}^2, \hat{S}^3)$$

$$\underbrace{\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}}_{4\times4\text{-Matrix}}$$

Pauli-Spin-Matrize

Es gilt:

$$[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{S}^k$$

$\Rightarrow$ Die Komponenten von $\hat{\underline{S}}$ erfüllen die fundamentalen Drehimpuls-Vertauschungsrelation

(wie z.B. Bahndrehimpuls)

$$[\hat{H}_D, \hat{S}^i] = -i\hbar c (\hat{\underline{\alpha}} \times \underline{p}) \neq 0$$

(und auch $[\hat{H}_D, \hat{L}] \neq 0$)

aber

$$[\hat{H}_D, \hat{\Lambda}] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{\underline{p}}, \hat{\Lambda}] = 0$$

Leicht nachzurechnen! über Matrixdarstellung

$\Rightarrow$ $\hat{\Lambda}$ ist ein Kandidat für den gesuchten "weiteren" Operator, der zusammen mit $\hat{H}_D$ und $\underline{p}$ eine vollständige Satz kommutierender ~~Obse~~ Operatoren bildet und damit die Eigenzustände komplett festlegt!

Berechne nun die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}$

Matrixdarstellung von $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{\underline{S}} \cdot \underline{p}}{\underbrace{p}_{|\underline{p}| = \sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}}} = \frac{\hbar}{2p}\begin{pmatrix} \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} & 0 \\ 0 & \hat{\underline{\sigma}}\cdot\underline{p} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2p}\left(\begin{array}{cc|cc} p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{identisch}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

Charakteristisches Polynom:

$$\Big(\frac{\hbar}{2p}p_z - \underbrace{\hbar\varepsilon}_{\text{Eigenwert}}\Big)\Big(-\frac{\hbar}{2p}p_z - \hbar\varepsilon\Big) - \Big(\frac{\hbar}{2p}\Big)^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2\varepsilon^2 - \frac{\hbar^2}{2p^2}p_z^2 - \frac{\hbar^2}{(2p)^2}(p_x^2 + p_y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2\varepsilon^2 - \frac{\hbar^2}{4p^2}p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } \boxed{\hbar\varepsilon = \pm\frac{\hbar}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\varepsilon = \pm\frac{1}{2}}$$

Interpretation:

Das relativistische Elektron hat neben der Masse m_0 und der Ladung $-e_0$ noch eine weitere "Teilcheneigenschaft", nämlich den (Eigen-)Drehimpuls S.

Diese Eigenschaft ist für alle Lösungen ($\lambda = \pm 1$ und Impulsrichtung) dieselbe.

$$\hat{\underline{S}}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}}^{\sum_{i=1}^{3}} = \dots = \underbrace{\frac{3\hbar^2}{4}}_{\sum_i (\hat{\sigma}^i)^2 = \mathbb{1}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$= \hbar^2 s(s+1)\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit $s = \frac{1}{2}$

Der Dirac-Spinor ist also ein Drehimpuls mit Quantenzahl $s = \frac{1}{2}$

Dazu gehört die Quantenzahl $m_s = \pm \frac{1}{2}$ (zwei mögliche Einstellungen des Spins bzgl. $\vec{p}$)

entspricht den Eigenwerten ε des ~~Hel~~ Helizitätsoperators!

$(\varepsilon \Rightarrow m_s)$