

Dirac-Gl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_D \psi$ ψ -komponentige Vekt.

$\hat{H}_D = c \hat{\alpha} \hat{p} + \hat{\beta} m_0 c^2$ für freie Teilchen

$\hat{\alpha}^i$ ($i=1,2,3$): 4×4 Matrix
 $\hat{\beta}$: " " " " \hat{H}_D 4×4 Matrix

$(-i\partial + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1}) \psi = 0$

$\partial = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu$ mit $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$, $\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta}$
 $\hat{\gamma}^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i$

Lösungen der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen

bedeute $[\hat{H}_D, \hat{p}] = 0$ für freie Teilchen

→ Eigenfunktionen von \hat{p} sind auch welche von \hat{H}_D

$A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$ (dann $\hat{p} (A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) = \hbar \vec{k} (A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t})$)
 ebene Wellen!

entsprechend $= \frac{\hbar \vec{k}}{i} (A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) = \hbar \vec{k} A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$

A kann auch von \vec{p} und E abhängen

Ansatz für Spinor: $\psi(\vec{r}, t) = \underline{\psi}^o(E, \vec{p}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$

Einsetzen in (*)

$(-i\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1}) \psi = 0$

$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli-Matrix

$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = \hat{\beta} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}$

$\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$

bedeute $\partial_0 \psi = \frac{1}{c} (-i\omega) \psi$

$\partial_i \psi = i\hat{p}_i \psi$

Impulskomponente, kein Gradient

Setze $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ mit $\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$

man findet:

$$-\frac{1}{c\hbar} E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \cdot \underline{p} \\ -\hat{\sigma} \cdot \underline{p} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{aus Produkt } \hat{\sigma}^i p_i} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$$

explizit: $\hat{\sigma} \cdot \underline{p} = \hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3$ 2×2 Matrix

$$E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \cdot \underline{p} \\ -\hat{\sigma} \cdot \underline{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

ausdrücken \rightarrow lineares Gleichungssystem

$$\textcircled{1} \quad E \psi_1 = c \hat{\sigma} \cdot \underline{p} \psi_2 + m_0 c^2 \psi_1$$

$$\textcircled{2} \quad -E \psi_2 = -c \hat{\sigma} \cdot \underline{p} \psi_1 + m_0 c^2 \psi_2$$

$$\begin{pmatrix} (E - m_0 c^2) \hat{1} & -c \hat{\sigma} \cdot \underline{p} \\ -c \hat{\sigma} \cdot \underline{p} & (E + m_0 c^2) \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \textcircled{*}$$

Bemerkung: Dasselbe Gl.-System würde man erhalten wenn man direkt \hat{H}_D diagonalisiert

Damit $\textcircled{*}$ eine Lösung hat, muß die Koeffizienten determinante verschwinden!

$$(E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) \hat{1} - c^2 (\hat{\sigma} \cdot \underline{p})(\hat{\sigma} \cdot \underline{p}) = 0$$

benutze (hier ohne Beweis)
 $(\hat{\sigma} \cdot \underline{p})(\hat{\sigma} \cdot \underline{p}) = \hat{p}^2 \hat{1}$

$$\Rightarrow (E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 \hat{p}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 \hat{p}^2 = 0}$$

Hier lautet also wieder die relativist. Energie-Impuls-Relation auf!
 Das war erwart. da wir \vec{H}_D gerade so konstruiert haben!

\Rightarrow Es gibt also zwei mögliche Energiewerte ($\hat{=}$ Eigenwerten von \vec{H}_D)

$$E_\lambda(p) = \lambda c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad \text{mit } \lambda = \pm 1$$

Beachte: Jeder dieser Eigenwerte E_+ , E_- ist zweifach entartet,
 da die gl. (*) ein 4×4 -System ist

Außerdem aus (*): Beziehung zwischen den 2-Vektoren $\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\varphi}_2$

$$(E_\lambda - m_0 c^2) \underline{\varphi}_1 - c \vec{\sigma} \cdot \underline{p} \underline{\varphi}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi}_1 = \frac{c \vec{\sigma} \cdot \underline{p}}{E_\lambda - m_0 c^2} \underline{\varphi}_2 \quad \textcircled{a}$$

$$\text{und } -c \vec{\sigma} \cdot \underline{p} \underline{\varphi}_1 + (E_\lambda + m_0 c^2) \underline{\varphi}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi}_2 = \frac{c \vec{\sigma} \cdot \underline{p}}{E_\lambda + m_0 c^2} \underline{\varphi}_1 \quad \textcircled{b}$$

Wir fordern, dass unsere Lösung auch den Fall $p=0$ (ruhendes Teilchen)
 vernünftig beschreibt. In diesem Fall gilt $E_\lambda = \lambda c \sqrt{m_0^2 c^2} \Rightarrow E_+ = m_0 c^2, E_- = -m_0 c^2$

Wir wählen daher zur Beschreibung des Falls $\lambda=1$ die Relation \textcircled{a} und für $\lambda=-1$
 die vier normierten Vektoren sollen orthogonal sein die Relation \textcircled{b}

\Rightarrow Gesamtwellenfunktion für den Fall $\lambda=1$

$$\Psi_{p, \lambda}(\underline{r}, t) = N \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \underline{p}}{E_\lambda + m_0 c^2} \underline{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_\lambda(p) t - \underline{p} \cdot \underline{r})}$$

(Normierungsfaktor)

Man sieht:

Vierervektoren, jede Komponente entspricht einer ebenen Welle (mit Vorzeichen)

Beachte: Der 2-Vektor $\underline{\varphi}_1$ ist noch unbestimmt!

Zur endgültigen Festlegung von $\underline{\varphi}_1$ macht man folgende Überlegung

a) der gesamte Spinor $\underline{\psi}$ soll normiert sein (Wichtig für die Interpretation von $\underline{\psi}^\dagger \underline{\psi}$ als Wahrscheinlichkeit)

b) $\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2$ sind Zweikomponenten

→ kann dargestellt werden bzgl. der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 Eigenfunktionen von Z -dim.-Kom.

Führe ein: $\underline{x}_\varepsilon$ mit $\varepsilon = 1, 2$

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Gesamtspinor für den Fall $\lambda = 1$

$$\underline{\psi}_{p, \lambda, \varepsilon}(k, E) = N \begin{pmatrix} \underline{x}_\varepsilon \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_+ + mc^2} \underline{x}_\varepsilon \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_+(p)t - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

$$N \text{ wird berechnet aus } \underline{\psi}^\dagger \underline{\psi} = N^2 \left(1 + \left(\frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_+ + mc^2} \right)^2 \right) \stackrel{!}{=} 1$$

Damit ist die Konstruktion der Lösung der Dirac-Gl. für das freie Teilchen zunächst fertig!

Bemerkung

a) Lösungen sind ebene Wellen, die durch drei "Quantenzahlen" charakterisiert sind:

- Impuls \vec{p} (Kontinuum)

- Energiequantenzahl $\lambda = \pm 1$ (für jedes \vec{p})

(zwei "Energiezustände")

- Quantenzahl ε , die für jedes λ zwei Werte annehmen kann

$$\varepsilon = 1, 2$$

b) Die Spaltenvektoren zu festem \vec{p} sind orthogonal zueinander

c) Explizit:

$$\psi_{p,+1,\epsilon=1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+ t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

brauchen dazu
 $\hat{S} \mathbf{p}$
 $= \dots = \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}$

$$\psi_{p,+1,\epsilon=2} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \\ -\frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_+ t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\psi_{p,-1,\epsilon=1} = N \begin{pmatrix} -\frac{c p_z}{-E_- + m_0 c^2} \\ -\frac{c(p_x + i p_y)}{-E_- + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(-E_- t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\psi_{p,-1,\epsilon=2} = N \begin{pmatrix} -\frac{c(p_x - i p_y)}{-E_- + m_0 c^2} \\ -\frac{c p_z}{-E_- + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(-E_- t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

d) Ein allgemeines Spinor (für das freie Teilchen) entspricht einer Überlagerung dieser 4 ~~Basis~~ Basis-Lösungen

$$\psi = \sum_{p,\lambda,\epsilon} c_{p,\lambda,\epsilon} \psi_{p,\lambda,\epsilon}$$

Dirac-Gl.
ist linear!!

e) Die $\psi_{p,\lambda,\epsilon}$ sind Eigenfunktionen zum

- Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$ (Quantenzahl \mathbf{p})
- Dirac-Hamiltonian \hat{H}_D (Quantenzahl λ
Energieeigenwert $E_{\pm}(\mathbf{p})$)
- "Weilner Operator" (Quantenzahl ϵ
noch unbekannt)

Idee: die drei Operatoren bilden ein vollständiges Satz kommutierender Observablen
 (ähnlich wie beim H-Atom: $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$, $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
 \rightarrow Quantenzahlen n, l, m)

Frage: Was ist der weitere Operator?

f) Antwort: Der gesuchte Operator ist $\hat{\Lambda}$ großes Lambda

Helizitätsoperator $\hat{\Lambda} = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \hat{p}}{|\hat{p}|}$
 ————— Einheitsvektor in Richtung des Impulses \hat{p}
 Dirac'scher Spinoperator $\hat{\Sigma} = (\hat{\Sigma}^1, \hat{\Sigma}^2, \hat{\Sigma}^3)$
 ————— Pauli-Spin-Matrizen
 $\hat{\Sigma}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}$ 4x4-Matrix
 $\hat{\Lambda}$ ist die Projektion von $\hat{\Sigma}$ auf die Richtung des Impulses (\Leftrightarrow Ausbreitungsrichtung der Welle)

Es gilt: $[\hat{\Sigma}^i, \hat{\Sigma}^j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{\Sigma}^k$
 \Rightarrow Die Komponenten von $\hat{\Sigma}$ erfüllen die fundamentalen Drehimpuls-Vertauschungsrelationen
 (wie z.B. Bohrsche Drehimpuls)

$[\hat{H}_D, \hat{\Sigma}^i] = -i\hbar c (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}) \neq 0$ (und auch $[\hat{H}_D, \hat{L}] \neq 0$)

aber $[\hat{H}_D, \hat{\Lambda}] = 0$ und $[\hat{p}, \hat{\Lambda}] = 0$
 leicht nachzurechnen! über Matrixdarstellung

$\Rightarrow \hat{\Lambda}$ ist ein Kandidat für den gesuchten "weiteren" Operator, der zusammen mit \hat{H}_D und \hat{p} eine vollständige Satz kommutierender Operatoren bildet und damit die Eigenzustände komplett festlegt!

Berechne nun die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}$ Matrixdarstellung von $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \sum \frac{f}{p} = \frac{\hbar}{2p} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z \cdot p & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_z \cdot p \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2p} \left(\begin{array}{cc|cc} p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \text{identisch} & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

$(p) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

Charakteristisches Polynom .

$$\left(\frac{\hbar}{2p} p_z - \hbar \varepsilon \right) \left(-\frac{\hbar}{2p} p_z - \hbar \varepsilon \right) - \left(\frac{\hbar}{2p} \right)^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) = 0$$

Eigenwert

$$\Leftrightarrow \hbar^2 \varepsilon^2 - \frac{\hbar^2}{2p^2} p_z^2 - \frac{\hbar^2}{(2p)^2} (p_x^2 + p_y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \hbar^2 \varepsilon^2 - \frac{\hbar^2}{4p^2} p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwert } \boxed{\hbar \varepsilon = \pm \frac{\hbar}{2}} \quad \text{bzw. } \boxed{\varepsilon = \pm \frac{1}{2}}$$

Interpretation:

Das relativistische Elektron hat neben der Masse m_0 und der Ladung $-e$ noch eine weitere "Teilcheneigenschaft", nämlich den (Eigen-) Drehimpuls S .

Diese Eigenschaft ist für alle Lösungen ($\lambda = \pm 1$ und \hbar jeweils nicht $\hbar/2$) dasselbe

$$\hat{S}^2 = \hbar^2 \sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2^2 \end{pmatrix} = \dots = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \sum_i \hat{\sigma}_i^2 = 3$

Der Dirac-Spinor ist also

ein Drehimpuls mit Quantenzahl $s = \frac{1}{2}$

$$= \hbar^2 s(s+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $s = \frac{1}{2}$

Dazu gehört die Quantenzahl $m_s = \pm \frac{1}{2}$ (zwei mögliche Ergebnisse des Spins bei \uparrow)

entspricht den Eigenwerten ϵ des ~~Spin~~ Drehimpulsoperators!

$$(\epsilon \rightarrow m_s)$$