Lagrangedichte freie (klassische) Strahlenfeld

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}}\right)^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{\left(\nabla\times\underline{A}\right)^2}_{\underline{B}^2}$$

führt auf Maxwell-Gl. ohne Quellterme ($\rho = \underline{j} = 0$)

Lagrangedichte für 1 Teilchen (nicht-relativist.) im elektromagnet. Feld:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}^2 - q\phi(\underline{r},t) + q\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

führt auf BWGL mit Lorentzkraft

viele Teilchen:

$$\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))$$

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\dot{\underline{r}}_i(t)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))$$

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r}\left[-\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t)\right]$$

Lagrangedichte Gesamtsystem Felder + Teilchen

$$\boxed{\begin{aligned} L_{\text{Full}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\nabla\times\underline{A}\right)^2\right) \\ - \int d\underline{r}\left(\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) - \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t)\right)\end{aligned}} \quad (*)$$

Bemerkungen:

- die Variablen dieser Lagrange-Funktion sind die $\underline{r}_i(t)$, d.h. die Koordinaten der geladenen Teilchen, sowie die Felder $\phi(\underline{r},t)$, $A_k(\underline{r},t)$ mit $k=1,2,3$

  (insbesondere: $\rho(\underline{r},t)$ ist keine Variable!)

- Schreibe (*) wie folgt:

$$\boxed{L_{\text{Full}} = L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Feld}} + L_{\text{Kopplung}}} \quad (**)$$

mit $L_{\text{Teilchen}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2$ reiner Teilchenterm

$$L_{\text{Feld}} = \int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\nabla\times\underline{A}\right)^2\right)$$ reiner Feldterm

$$L_{\text{Kopplung}} = \int d\underline{r}\left(-\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{A}(\underline{r},t)\right)$$

enthält Teilchenkoordinat.

Felder, die auch in den Maxwell-Gl. auftauchen

• Die Euler-Lagrange-Gl. von $\tilde{L} = L_{Teilchen} + L_{Kopplung}$ bezgl. $\underline{r}_i$ und $\dot{\underline{r}}_i$ führen (wie gehabt) auf die Bewegungsgl. mit Lorentzkraft

(ersetze dazu $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ werden durch die mikroskop. Ausdrücke (Deltafunkt.)

• Die Euler-Lagrange-Gl. bezgl. $\phi^{(ext)}$ und $A_k(\underline{r},t)$ von $\tilde{\tilde{L}} = L_{Feld} + L_{Kopplung}$ führen (wie gehabt) auf die Maxwell-Gleichungen

Frage nun: wie lautet der zugehörige Hamiltonoperator?

Im Prinzip klar:
- Berechnung konjugierter Impulse (bzgl. $\underline{r}_i, \phi, A_k$)
- Aufstellung Hamiltondichte über Legendretransformation
- Quantisierung der kanonisch konjugierten Größe

$\rightarrow$ Hamiltonoperator

Vereinfachungen:

Wir schreiben L_{Feld} zunächst etwas um, wobei wir direkt die Coulomb-Eichung benutzen (L_{Feld} ist ja bisher unabhängig von der Eichung!)

(Idee dahinter:
Dadurch lassen sich bestimmte Variablen eliminieren)

Strategie:

Wir spalten die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ in jeweils einen longitudinalen und einen transversalen Anteil bezgl. des Wellenvektors $\underline{k}$

Überlagerung von

betrachte Fourier-Komponenten ($\underline{E}(\underline{r}) \sim \underline{E}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$)

$$\underline{E}(\underline{k}) = \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) + \underline{E}_{\perp}(\underline{k}) \quad \text{mit} \quad \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{(\underline{k}\cdot\underline{E})\cdot\underline{k}}{k^2}$$

longitudinale Komponente

$$\underline{E}_{\perp}(\underline{k}) = \underline{E}(\underline{k}) - \underline{E}_{\parallel}(\underline{k})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) \cdot \underline{E}_{\perp}(\underline{k}) = 0$$

analog für die Fourier-Komponente $\underline{B}(\underline{k})$

Maxwell-Gl.:

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0 \xrightarrow{\text{in Fourierraum}} \underline{k}\cdot\underline{B}(\underline{k}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{B}_{\parallel}(\underline{k}) = 0$$

„Magnetfeld ist rein transversal"

$$\nabla\cdot\underline{E} = \rho/\varepsilon_0 \xrightarrow{\text{in Fourierraum}} \varepsilon_0\, i\,\underline{k}\cdot\underline{E}(\underline{k}) = \rho(\underline{k})$$

Kombiniere mit der Def. von $\underline{E}_{\parallel}(\underline{k})$

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{\parallel}(\underline{k},t) = -\frac{i\underline{k}}{\varepsilon_0 k^2}\,\rho(\underline{k},t)$$

Das longitudinale elektr. Feld ist also komplett durch die instantane Ladungsverteilung bestimmt!

(keine Retardierung)

Man erkennt:

Die longitudinalen Anteile $\underline{B}_{\parallel}(\underline{k})$ und $\underline{E}_{\parallel}(\underline{k})$ sind keine "relevanten" dynamische Variablen!

Denn $\underline{B}_{\parallel}(\underline{k}) = 0$, $\underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) \sim \rho\,\underline{k}$, ρ ist fest vorgegeben!

Betrachte jetzt Coulomb-Eichung:

$$\nabla\cdot\underline{A} = 0 \xrightarrow{\text{in Fourierraum}} \underline{k}\cdot\underline{A}(\underline{k}) = 0$$

$\Rightarrow$ auch $\underline{A}$ rein transversal !!

$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}_\perp(\underline{r},t)$

Folgerung für $\underline{E}$:

$$\underline{E} = \underline{E}_\parallel + \underline{E}_\perp \overset{!}{=} -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

$\Rightarrow$ identifiziere: $\underline{E}_\parallel = -\nabla\phi$, $\underline{E}_\perp = -\dot{\underline{A}}_\perp = -\dot{\underline{A}}$

Coulomb-Eichung!

und $\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

folgt aus der Potentialgl. in Coulombeichung!

Zurück zur Lagrangedichte:

Dort hatten wir $\tilde{\tilde{L}} = L_{Feld} + L_{Kopplung}$

$$= \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2 - \rho\phi + \underline{j}\cdot\underline{A} \right)$$

betrachte speziell:

$$I = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) \right)$$

$$= \int d\underline{r} \; \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}_\parallel + \underline{E}_\perp)^2 - \rho\phi)$$

$$= \int d\underline{r} \; \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}_\parallel^2 + \underline{E}_\perp^2 + 2\underbrace{\underline{E}_\parallel\cdot\underline{E}_\perp}_{\text{Null}} - \rho\phi)$$

$\underline{E}_\perp = -\dot{\underline{A}}_\perp = -\dot{\underline{A}}$

$$I = \int d\underline{r} \; \frac{\varepsilon_0}{2}(\dot{\underline{A}})^2 + \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}_\parallel^2 - \rho\phi \right) \quad (*)$$

Erinnerung: $\underline{E}_{\parallel}$ ist keine "relevante" dyn. Variable!

Schreibe den Term mit $\underline{E}_{\parallel}$ um.

$$\underline{E}_{\parallel}(\underline{k}) = \frac{-i\underline{k}}{k^2\varepsilon_0}\rho(\underline{k},t)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\; \underline{E}_{\parallel}^2(\underline{r},t) \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{k}\; |\underline{E}_{\parallel}(\underline{k},t)|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{k}\; \frac{|\rho(\underline{k},t)|^2}{\varepsilon_0 k^2}$$

benutze:

mikroskop. Def.: $\rho(\underline{r},t) = \sum_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$

Fourierkomponente: $\rho(\underline{k},t) = \int d\underline{r}\; e^{i\underline{k}\underline{r}}\rho(\underline{r},t)$
$= \sum_i q_i e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}_i(t)}$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_i q_j \underbrace{\int d\underline{k}\; \frac{e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r}_i^{(t)}-\underline{r}_j^{(t)})}}{k^2}}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}_i(t)-\underline{r}_j(t)|}}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i(t)-\underline{r}_j(t)|}$$

betrachte nun in ⊛ den Term

$$-\int d\underline{r}\; \rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\;\rho(\underline{r},t)\int d\underline{r}'\;\frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

benutze Ausdruck für $\phi(\underline{r},t)$ in Coulombeichung!

benutze mikroskop. Def. von $\rho(\underline{r},t)$

$$= \dots = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i^{(t)}-\underline{r}_j^{(t)}|}$$

Folgerung für das ganze Integral I

$$I = \int d\underline{r}\;\frac{\varepsilon_0}{2}(\dot{\underline{A}})^2 + \int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}_{\parallel})^2 - \rho\phi\right)$$

$$= \int d\underline{r}\;\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{(\dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}_{\perp}^2} - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i(t)-\underline{r}_j(t)|}$$

definiere noch: $W_{Coulomb} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i(t) - \underline{r}_j(t)|}$

Coulombenergie! des Vielteilchensystems

(für zwei Teilchen hätte man $W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$

enthält divergente Terme (mit $j=i$!)

Konvention häufig: Schließe diese Terme aus

$W_{Coulomb} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i(t) - \underline{r}_j(t)|}$

Damit lautet L_{Full} in Coulomb-Eichung:

$$\boxed{L_{Full} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2}_{\text{Teilchen}} + \int d\underline{r} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \underline{A})^2\right)}_{\text{Feldanteil in Coulombeichung}} + \underbrace{\int d\underline{r}\, \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{A}(\underline{r},t) - W_{Coulomb}}_{\text{Kopplung}}}$$

Jetzt: Übergang zu Hamiltonfunktion

denn mikroskop.: $\underline{j} \sim q_i \dot{\underline{r}}_i$

Kanonisch konjugierte Impulse: $\underline{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{r}}_i}\left(L_{Teilchen} + L_{Kopplung}\right)$

$$= m\dot{\underline{r}}_i + q_i \underline{A}(\underline{r}_i,t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\underline{r}}_i = \frac{1}{m}(\underline{p}_i - q_i \underline{A}(\underline{r}_i,t))$$

$$\underline{\Pi}_A = \frac{\partial \mathcal{L}^{Feld}}{\partial \dot{\underline{A}}} = \varepsilon_0 \dot{\underline{A}} = -\underline{E}_\perp$$

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i \dot{\underline{r}}_i + \int d\underline{r}\, \underline{\Pi}_A(\underline{r},t) \cdot \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) - L_{Full}$$

in Coulombeichung

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i \left(\frac{1}{m}(\underline{p}_i - q_i \underline{A})\right) + \int d\underline{r}\ \varepsilon_0 \dot{\underline{A}}^2$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{m}(\underline{p}_i - q_i \underline{A}(\underline{r}_i,t))\right)^2 - \int d\underline{r}\ \frac{\varepsilon_0}{2} (\dot{\underline{A}})^2 + \int d\underline{r}\ \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$\underbrace{- \int d\underline{r}\ \underline{j} \cdot \underline{A}}_{\sum_i q_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{A}(\underline{r}_i,t) = \sum_i q_i \frac{1}{m}(\underline{p}_i - q_i \underline{A}(\underline{r}_i,t)) \cdot \underline{A}(\underline{r}_i,t)} + W_{Coulomb}$$

Zusammenfassung der Terme aus $\underline{r}_i$

$$\Rightarrow \boxed{H_{Full} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \left(\underline{p}_i - q_i \underline{A}(\underline{r}_i,t)\right)^2 \quad \text{„kinetische Energie"} + \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{(\dot{\underline{A}}(\underline{r}_i,t))^2}_{(\underline{E}_\perp)^2} + \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_i,t))^2}_{\underline{B}^2} \right) + W_{Coulomb}}$$

volle klassische Hamiltonfunktion für System aus geladenen Teilchen und Feldern

Quantisierung:

$$\underline{r}_i \to \hat{\underline{r}}_i, \quad \underline{p}_i \to \hat{\underline{p}}_i \quad \text{mit} \quad [\hat{r}_{i,k}, \hat{p}_{j,l}] = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}$$

$k,l = 1,2,3$
kartesische Komponenten

$$A_k \to \hat{A}_k, \quad \Pi_k = \varepsilon_0 \dot{A}_k$$
$$= -\varepsilon_0 E_k \to \hat{\Pi}_k$$

mit $\left[\hat{A}_k(\underline{r},t),\ \Pi_l(\underline{r}',t)\right] = i\hbar\, \delta^{\perp}_{kl}(\underline{r}-\underline{r}')$

siehe z.B. Schwabl

mit der "transversalen Deltafunktion"

$$\delta^{\perp}_{kl}(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\underline{k}\; e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}\left(\delta_{kl} - \frac{k_k k_l}{k^2}\right)$$

$$= \delta_{kl}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') + \frac{1}{4\pi}\,\partial_k'\partial_l'\,\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Letzter Schritt:

Entwickle $\hat{\underline{A}}(\underline{r},t)$ wieder in Moden (genauso wie beim freien Strahlungsfeld!)

$$\hat{\underline{A}}(\underline{r},t) = \sum_{\underline{k}}\left(\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}}\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{a}_{\underline{k}}\,\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,e^{-i\omega_{\underline{k}}t} + \hat{a}^{+}_{\underline{k}}\,\underline{u}^{*}_{\underline{k}}(\underline{r})\,e^{i\omega_{\underline{k}}t}\right)$$

$$\hat{\underline{E}}_{\perp}(\underline{r},t) = -\dot{\hat{\underline{A}}}(\underline{r},t), \quad \hat{\underline{B}} = \nabla\times\hat{\underline{A}}$$

$\Rightarrow$ Umschreiben des Feldanteils

siehe Kapitel Quantisierung freies Strahlungsfeld

$$\int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\dot{\hat{\underline{A}}}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\nabla\times\hat{\underline{A}}\right)^2\right) = \ldots = \sum_{\underline{k}}\hbar\omega_{\underline{k}}\left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

mit $\hat{N}_{\underline{k}} = \hat{a}^{+}_{\underline{k}}\hat{a}_{\underline{k}}$

Photonensystem (bosonisch!)

Gesamtausdruck für Hamiltonian

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_{\text{Teilchen}} + \hat{H}_{\text{Feld}} + \hat{H}_{\text{Kopplung}}}$$

$$\hat{H}_{\text{Teilchen}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_i\sum_j\frac{q_i q_j}{|\hat{\underline{r}}_i(t)-\hat{\underline{r}}_j(t)|}$$

enthält Coulombenergie!

$$\hat{H}_{Feld} \doteq \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\hat{\underline{E}}_\perp\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\hat{\underline{B}}\right)^2 \right) = \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{H}_{Kopplung} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\underline{p}}_i \cdot \underline{A}(\underline{r}_i, t)}{m} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i^2 \left(\hat{\underline{A}}(\underline{r}_i, t)\right)^2}{2m}$$

mit $\underline{A}(\underline{r}, t)$
rein transversal!