

\* Wiederholung QM-Grundlagen

c) Operatoren

Quantenmechan. Observablen  $\rightarrow$  lineare Operatoren im Hilbertraum  $\hat{A}$

adjungierter Operator

Sei  $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$

$\langle \psi | \hat{A}^\dagger = \langle \phi |$  - adjungierte Operate

Def. über ~~Skalar~~ Matrixelement

$$\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

$$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$$

Selbstadjungierter Operator: ( $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ )

$$\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \hat{A} \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^*$$

speziell:  $|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$

$$\Rightarrow \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^*$$

Falls  $\hat{A}$  selbstadjungiert

$\Rightarrow$  Erwartungswert von  $\hat{A}$  im Zustand  $|\psi_1\rangle$  ist reell !!

Wichtig, da Erwartungswert dem Messergebnis entspricht

Unitäre Operatoren:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{1}$$

d) Dynamik von Quantensystemen

Zeitabhängige Schrödingergleichung (SG):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (*)$$

Sei  $\hat{H}$  nicht explizit zeitabhängig

Dann kann man  $\otimes$  (Satz) lösen durch:  $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t)} |\psi(0)\rangle$   
 $=: \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle$

Zeitentwicklungsoperator  
 (im Falle, dass  $\hat{H}$  nicht explizit  
 zeitabhängig!)

adjungierte SG:  $\langle \psi(t) | \hat{H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) |$

Zeitunabhängige SG

$|\psi(t)\rangle = f(t) |\varphi\rangle \Rightarrow \hat{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle$   
 (falls  $\hat{H}$  nicht explizit zeitabhängig)

Ehrenfestgleichung für Erwartungswerte

betrachte  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$

$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \dots = \langle \underbrace{[\hat{A}, \hat{H}]}_{\text{Kommutator}} \rangle + \frac{\hbar}{i} \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle$   
 relevant bei expliziter Zeitabhängigkeit von  $\hat{A}$

Folgerung: falls  $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$  und  $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \hat{A}$  ist Erhaltungsgröße

Analogie zu klass. Mechanik: (Observable  $A$ )

,  $f$  Freikörpergleichung

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

## Bilder in der QM

- Schrödingerbild:
  - Zustandsvektoren zeitabhängig:  $|\psi(t)\rangle$   
(aber Zeitabhängigkeit häufig "trivial"  $\sim e^{-i\hbar^{-1}Et}$   
falls  $\hat{A}$  nicht explizit zeitabhängig)
  - Operatoren zeitunabhängig
  - Dym. Gleichung: Schrödingergleichung

- Heisenbergbild - Operatoren zeitabhängig

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0)$$

Zeitentwicklungsgeneratoren mit

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle$$

Schrödinger

$$\Leftrightarrow |\psi(0)\rangle = \hat{U}^{-1}(t, 0) |\psi(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t, 0) |\psi(t)\rangle$$

Operate im Schrödingerbild

Erwartungswert:

$$\langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{A}_S \hat{U}(t, 0) | \psi(0) \rangle$$

Erwartungswert im Heisenbergbild

$$= \langle \psi(t) | \hat{A}_S | \psi(t) \rangle$$

Erwartungswert im Schrödingerbild

Erwartungswert bleibt beim Bildwechsel erhalten!

Zentrale dynamische Gleichung im Heisenbergbild

(für Operatoren, die Zustände als konstant betrachtet werden)

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \dots = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H] \quad \text{Heisenberg'sche Bewegungsgleichung}$$

## Dirac-Bild

Sei  $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$  mit  $\hat{H}^1 = \hat{H}^1(t)$  zeitabhängige Störung

Zeitunabhängig

Dirac-Operatoren.  $\hat{A}_D(t) = e^{i\frac{t}{\hbar} \hat{H}^0} \hat{A}_S e^{-i\frac{t}{\hbar} \hat{H}^0}$

$$\frac{d\hat{A}_D}{dt} = i\frac{1}{\hbar} [\hat{H}^0, \hat{A}_D]$$

Dirac-Zustände.  $|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t, 0) |\psi(t)\rangle$

Zugehörige dyn. Gl.:  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_D(t)\rangle = \hat{H}^1 |\psi_D(t)\rangle$   
 ist formal aus wie SG ↖ Störoperator

## I. Relativistische Quantenmechanik

Bisher Kernphysik (Einwirkung...)

Nicht-relativistische QM, mit einem Hamiltonoperator  $\hat{H}$ , den man mit Hilfe der Korrespondenzregel aus der klass. nicht-relativistischen Mechanik bekommt kann

Kandidat für freie Teilchen (nicht-relativistisch)

$$E = E^{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{klass., nicht-relativistisch}$$

Korrespondenzregel  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi} \quad \text{mit } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = \frac{p^2}{2m}$$

(analog für Teilchen im Potential:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{V}$$

## Zusammenhang mit Dispensionsrelation

benutze:  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$  (de Broglie-Relation)

Für freien, nicht-relativistisches Teilchen folgt

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \omega(k)$$

$$(k = |k|)$$

Warum nun relativistische QM?

→ Zentrales Ziel:

Beschreibung des Spins, Spin-Bahn-Wechselwirkung...

Dies sind (man) relativistisch begründbare Effekte!

## I.1. Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt: Relativistische Energie-Impuls-Beziehung (freies Teilchen)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (*)$$

mit  $c$  (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit,  $m_0$  (Ruhe-)masse

und  $p$  relativistische mechanische Impuls  $p = \gamma m_0 v$  - Geschwindigkeit

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Lim } \frac{v}{c} \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$$

$$\Rightarrow p = m_0 v \quad \text{für nicht-relativ. Fall}$$

Exkurs zum Hintergrund der Gleichung (\*)

Elementar:  
Spezielle Relativitätstheorie

Vierer-Geschwindigkeit:  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{z}}$  mit  $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

räuml. Komponente  
Zeit. Komponente

Komponente des Viererchtes  $u$

$d\tilde{z} = \frac{1}{\gamma} dt$   
"Eigenzeit"

und  $dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz)$

~~man findet~~

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{z}} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tilde{z}} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$\frac{dx^\mu dx_\mu}{\text{Skalarprodukt}} = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (ds)^2$$

differenzielles Linienelement

$$\Rightarrow u^0 = \gamma c$$

$$u^i = \gamma v^i \quad i=1, 2, 3, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u^\mu u_\mu = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \begin{pmatrix} \gamma c \\ -\gamma v_x \\ -\gamma v_y \\ -\gamma v_z \end{pmatrix} = \dots = c^2$$

### Vierer-Impuls

Komponente

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad \text{mit} \quad p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

### Komponenten

$$p^0 = m_0 \gamma c \quad \text{Zeit Komponente}$$

$$p^i = m_0 \gamma v^i \quad i=1, 2, 3 \quad \text{räuml. Komponente}$$

Die Raumkomponente  $p^i$  entspricht dem relativist. mechan. Impuls

Man kann zeigen (Herleitung über relativist. Mechanik)

$$p^0 = \frac{1}{c} E_{\text{kin}}^{\text{rel}} \quad \text{mit} \quad E_{\text{kin}}^{\text{rel}} = m_0 \gamma c^2$$

$$\Rightarrow p^\mu = \left( \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, \underbrace{m \vec{v}}_p \right)$$

räuml. Komponenten

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 = \frac{1}{c^2} (E_{kin}^{rel})^2 - p^2$$

$$\Rightarrow E_{kin}^{rel} = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$$

Granzfälle:

- Für kleine  $\frac{p}{m_0 c}$  verhält sich  $E_{kin}^{rel} \sim p^2$  "teilchenartig"

- Für große Impulse wie  $E_{kin}^{rel} \sim p$  "wellenartig"

Zurück zur Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (*)$$

Frage: Kann man heraus wie im nicht-relativist. Fall eine dyn.-Gleichung für die quantenmechan. Zustände herleitet?

1. Versuch

nehme (\*) und ersetze  $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta} \psi$$

Nicht akzeptabel, da auf der rechten Seite nicht-analyt.

Funktion eines Operators aufzuheben (Kannst du unter der Wurzel) ...  
 Differential-

Z. Versuch

quadrate (\*) zunächst und ersetzen dann

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

jetzt:  $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = \left( m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta \right) \psi$$

$$\psi = \psi(x, t)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \left( -\hbar^2 c^2 \Delta + m_0^2 c^4 \right) \psi \quad | : (-\hbar^2 c^2)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

Benutze noch die Def. des d'Alembert-Operators

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(Vorsicht: Vorzeichen manchmal anders)

$$\Rightarrow \left( \square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung