Hamiltonian des "freien" Strahlungsfeldes ($\rho(\underline{r},t)=0$, $\underline{j}(\underline{r},t)=0$) aus klass. Ausdruck für Energie $E=\int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r},t))^2+\frac{1}{2\mu_0}(\underline{B}(\underline{r},t))^2\right)$

$$\hat{H} = \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_{\underline{k}} (\underbrace{\hat{a}^+_{\underline{k}}\hat{a}_{\underline{k}}}_{\hat{n}_{\underline{k}}} + \tfrac{1}{2})$$

, Quantenteilchen: Photonen (Bosonen!)

$\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$

$\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$

völlig äquivalent zu quantisierten (Gitter-) Schwingungen

Lagrangedichte: $L=\int d\underline{r}\, \mathcal{L}$ mit $\mathcal{L}=(\varphi_i, \varphi_{i,\mu})$ mit $\varphi_i=\varphi_i(\underline{r},t)$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{i,\mu}} = 0$$

$\varphi_{i,\mu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_i(\underline{r},t)$

$x^\mu=(t,x,y,z)$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung für Felder

Konjugiertes Impulsfeld $\Pi_{\varphi_i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_i}$ mit $\dot{\varphi}_i=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i$

Hamiltondichte: $\mathcal{H}=\sum_i \dot{\varphi}_i\Pi_{\varphi_i} - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\underline{r},t)$

$\varphi_i, \Pi_{\varphi_i}$ konjugierte Feldvariablen

quantisiere: $\varphi_i\to\hat{\varphi}_i$, $\Pi_{\varphi_i}\to\hat{\Pi}_{\varphi_i}$ mit $\left[\hat{\varphi}_i(\underline{r},t), \hat{\Pi}_{\varphi_j}(\underline{r}',t)\right]_{\pm} = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Hamiltonoperator: quantisierte Form von

$$H=\int d\underline{r}\,\mathcal{H}(\underline{r},t)\Rightarrow\hat{H}$$

Beispiel:

Schrödinger-Gl.

$$\mathcal{L}=\frac{i\hbar}{2}(\varphi^*\dot{\varphi}-\dot{\varphi}^*\varphi)-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{\mu=1}^{3}\varphi_{,\mu}\varphi^*_{,\mu} - V(\underline{r},t)\,\varphi^*\varphi$$

$\varphi_{,\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$

aus Lagrange-Gl. für φ bzw. φ^*:

$$i\hbar\,\dot{\varphi}(\underline{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\underline{r},t)+V(\underline{r},t)\varphi(\underline{r},t)$$ Schrödinger-Gl.!

Konjugierter Impuls zu $\varphi(\underline{r},t)$: $\Pi_\varphi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{i\hbar}{2}\varphi^*$

$\varphi(\underline{r},t)$ und $\varphi^*(\underline{r},t)$ sind also kanonisch konjugierte Variablen quantisiere: $\psi(\underline{r},t) \longrightarrow \hat{\psi}(\underline{r},t)$

$\psi^*(\underline{r},t) \longrightarrow \hat{\psi}^+(\underline{r},t)$

Feldoperatoren, diese haben wir bereits beim Kap. Zweite Quantisierung kennengelernt!

Vertauschungsrelation: $\big[\hat{\psi}(\underline{r},t), \underbrace{\hat{\psi}^+(\underline{r}',t)}_{\frac{2}{i\hbar}\hat{\Pi}_\psi}\big]_\pm = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$\pm$ hängt vom System ab!

Hamiltondichte:

$$\mathcal{H} = \overbrace{\dot{\psi}\Pi_\psi}^{\text{Beitrag aus }\psi} + \overbrace{\dot{\psi}^*\Pi_{\psi^*}}^{\text{Beitrag aus }\psi^*} - \mathcal{L}$$

$$= \cancel{\dot{\psi}\frac{i\hbar}{2}\psi^*} - \cancel{\dot{\psi}^*\frac{i\hbar}{2}\psi} - \cancel{\frac{i\hbar}{2}\psi^*\dot{\psi}} + \cancel{\frac{i\hbar}{2}\dot{\psi}^*\psi}$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\sum_k \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + V\psi^*\psi$$

$$= +\frac{\hbar^2}{2m}\sum_k \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + V\psi^*\psi$$

$$H = \int d\underline{r}\, \mathcal{H}(\underline{r},t) \xrightarrow{\text{ersten Term partiell integrieren}} \int d\underline{r}\, \psi^*(\underline{r},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi(\underline{r},t)$$

(benutze dass $\psi=0$ auf dem Rand)

$$\boxed{\hat{H} = \int d\underline{r}\, \hat{\psi}^+(\underline{r},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\hat{\psi}(\underline{r},t)}$$

IV.3.2. Elektromagnetische Felder, Hamiltonians

a) Elektrostatik

interessierendes Feld: $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi(\underline{r})$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\left(\nabla\phi(\underline{r})\right)^2}_{\underline{E}^2} - \underbrace{\rho(\underline{r})\,\phi(\underline{r})}_{\text{potentielle Energie einer Ladung(sdichte) im Potential }\phi(\underline{r})}$$

also nur eine Feldvariable, nämlich $\phi(\underline{r})$

$\rho(\underline{r})$: Ladungsdichte hier: fest vorgegeben !

Lagrange-Gl.:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,k}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{mit} \quad \phi_{,k} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$$

Keine Zeitableitung, da statisch!

$$-\rho(\underline{r}) - \varepsilon_0 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}}_{-E_k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik

b) Magnetostatik (hier ohne Beweis)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \Big(\underbrace{\nabla \times \underline{A}(\underline{r})}_{\underline{B}(\underline{r})} \Big) - \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

$\underline{j}(\underline{r})$: statische Stromdichte (vorgegeben!)

Feldvariablen: $A_k(\underline{r})$, $k = 1,2,3$

liefert: $\boxed{\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})}$ Ampere'sches Gesetz

c) Elektrodynamik

hier: $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

Wie sieht die Lagrangedichte aus?

Einfachste Idee: Addition des elektrischen und magnet. Anteils

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}} \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \underline{A} \right)^2 - \rho(\underline{r},t)\,\phi(\underline{r},t) - \underline{j}(\underline{r},t)\,\underline{A}(\underline{r},t)$$

liefert nicht die richtigen Maxwell-Gl.!

"Richtige" Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \underline{A} \right)^2 - \rho\,\phi + \underline{j} \cdot \underline{A}$$

Ziehe magnet. Anteil von dem elektr. Anteil ab

Feldvariablen: $\phi(\underline{r},t)$ und $A_k(\underline{r},t)$ mit $k = 1,2,3$ $\Rightarrow$ 4 Lagrange-Gl.

Die „Quellen" $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ sind vorgegeben!

Man kann zeigen:

- Lagrange-Gl. bzgl. ϕ führt auf $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = \frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$

- " bzgl. A_μ führt auf $\nabla \times \underline{B}(\underline{r},t) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}}_{\text{Verschiebungsstrom}}$

- die beiden anderen Maxwell-Gl. folgen aus der Def. von ~~Eq~~ $\underline{E}$ bzw. $\underline{B}$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}} \rightarrow \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{A}) = -\dot{\underline{B}} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Bemerkung: Die Lagrangedichte kann in relativistisch kovarianter Form geschrieben werden!

benutze: • $\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2 = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

Komponente des 4-er Feldstärketensors

• $\rho\phi - \underline{j}\cdot\underline{A} = j^\mu A_\mu$ (s. Übungsblatt)

mit $j^\mu = (c\rho, \underline{j})$

$A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \underline{A})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu}$$

d) Freies Strahlungsfeld

sei $\rho(\underline{r},t) = 0$, $\underline{j}=(\underline{r},t) = 0$

aus allg. Form für $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}}$$

mit Coulombeichung $(\nabla \cdot \underline{A} = 0)$ $\Rightarrow$ setze $\phi = 0$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2} \quad (*)$$

3 Feldvariablen $A_k(\underline{r}, t)$ mit $k = 1, 2, 3$

Liefert die richtige Potentialgleichung für $\underline{A}$!

aus $(*)$ $$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k}}_{0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k}}_{\frac{\varepsilon_0}{2} 2 \dot{A}_k} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_k}{\partial x_j}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

$$(\nabla \times \underline{A})^2 = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)^2 + (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1)^2 + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2$$

3. Term: betrachte $k = 1$

$j = 1$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_1}} = 0$

$j = 2$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_2}} = \frac{1}{2\mu_0} 2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(-1) = -(\underline{B})_3$

$j = 3$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_3}} = \ldots (\underline{B})_2$

insgesamt $k = 1$
$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x_3} = + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underline{B})_1$$

aus Lagrange-Gl. $$-\varepsilon_0 \ddot{A}_k - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underbrace{(\nabla \times \underline{B})}_{\underline{B}})_k = 0$$

benutze: $\text{rot}(\text{rot}\, \underline{F}) = \text{grad}\, \text{div}\, \underline{F} - \Delta \underline{F}$

hier $\underline{F} = \underline{A}$, $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\rightarrow \boxed{-\varepsilon_0 \ddot{A}_k + \frac{1}{\mu_0} \Delta (\underline{A})_k = 0} \quad | \cdot \mu_0$$

$$\boxed{-\frac{1}{c^2} \ddot{A}_k + \Delta A_k = 0} \quad \text{wie gefordert!}$$

Zurück zur Lagrangedichte (*)

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2$$

Kanonisch konjugierte Impulse: $\Pi_{A_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k = -\varepsilon_0 E_k$

Also sind A_k und E_k bis auf Vorfaktoren konjugierte Variable!

Diese sind daher zu quantisieren!

Hamiltondichte:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{3} \dot{A}_k \Pi_{A_k} - \mathcal{L} = \sum_k \varepsilon_0(\dot{A}_k)^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}(\dot{\underline{A}})^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)\right)^2}_{(\underline{E}(\underline{r},t))^2} + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A}(\underline{r},t))^2$$

$\Rightarrow$ Hamiltonoperator $\hat{H} = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\hat{\underline{A}}(\underline{r},t)}_{\hat{\underline{E}}(\underline{r},t)}\big)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\nabla\times\hat{\underline{A}}(\underline{r},t)\right)^2\right)$

Konsistent mit dem Ausdruck, der sich aus der klass. Energie

$$E = \int d\underline{r}\ \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r},t))^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\underline{B}(\underline{r},t)^2)$$

benutze jetzt noch die quantisierte Form für $\underline{A}$

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_q \hbar\omega_q\left(\hat{a}_q^+\hat{a}_q + \frac{1}{2}\right)$$

IV.3.3. Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Zunächst klassisch: Erinnerung an 1 geladenes Teilchen, nicht-relativistisch, im elektromagnet. Feld

Zugehörige Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - \overset{\text{Ladung}}{q}\, \phi(\underline{r},t) + q\, \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)} \quad (*)$$

Lagrange-Gl. führen auf die richtige Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial L}{\partial r_k} = 0 \qquad \forall k = 1,2,3$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m \dot{r}_k + q A_k(\underline{r},t)\Big) + q \frac{\partial \phi}{\partial r_k} - q \frac{\partial}{\partial r_k}\big(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{r}_k = -q \frac{d A_k(\underline{r},t)}{dt} - q \frac{\partial \phi}{\partial r_k} + q \frac{\partial}{\partial r_k}(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A})$$

benutze: $\frac{d A_k(\underline{r},t)}{dt} \overset{\text{Kettenregel } (\underline{r} = \underline{r}(t))}{=} \dot{\underline{r}} \cdot \nabla A_k(\underline{r},t) + \frac{\partial A_k}{\partial t}$

$$\Rightarrow m \ddot{r}_k = q\left(-\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial r_k}\right) + q\left(\dot{\underline{r}} \times (\nabla \times \underline{A})\right)_k$$

$$= q E_k(\underline{r},t) + q\left(\dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)_k$$

k-te Komponente der Lorentzkraft

Bemerkungen zu (*)

- Verallgemeinern auf relativist. Mechanik (hier ohne Beweis):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}} - q\phi + q\, \dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}$$

- Viele Teilchen, nicht-relativistisch (ohne Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung)
  Masse aller Teilchen gleich

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^{N} q_i\, \phi(\underline{r}_i, t) + \sum_{i=1}^{N} q_i\, \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{A}(\underline{r}_i, t)$$

Führe ein: Mikroskopische Definition

– der Ladungsdichte

mikroskopische Ladungen

$$\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

– der Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{q_i \dot{\underline{r}}_i(t)}_{\text{mikroskop. Strom}}\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r} \left[-\rho(\underline{r},t)\, \phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\, \underline{A}(\underline{r},t) \right]$$

(**)

Beweis durch Einsatz der mikroskop. Definition und Eigenschaften der Delta-Funktion

Frage:
Wie lautet die Lagrangefunktion für das Gesamtsystem aus Teilchen und Feldern?

Idee: Addiere zu (**) die Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes!

$$\boxed{\begin{aligned} L_{full} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}^2} \right) \\ &\quad - \int d\underline{r} \left(\rho(\underline{r},t)\, \phi(\underline{r},t) - \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{A}(\underline{r},t) \right) \end{aligned}}$$