

Elektrodynamik, Potentialsgleichung in der Coulombnorm ($\nabla \cdot \underline{A} = 0$) und $\rho(\underline{r}, t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r}, t) = 0$

$\Delta \phi(\underline{r}, t) = 0$, $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$
 für alle Zeit! relevante Gleichung

Lösung in einer Variabel $\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} u_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + a_{\underline{k}}^* u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{+i\omega_{\underline{k}} t} \right)$
 Eigenfrequenz Moden

Coulombgleichung: $\nabla \cdot u_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0 \Leftrightarrow \underline{k} \cdot u_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$

$\int_G d\underline{r} u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r}) = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$
 $G \leftarrow$ Variabel

$A=0$ auf dem Rand von der Variabel

und $\Delta u_{\underline{k}}(\underline{r}) + \frac{\omega_{\underline{k}}^2}{c^2} u_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$ damit Lösungsansatz für \underline{A} die Poisson-Gleichung erfüllt!

Energie des elektromagnetischen Feldes $E = \int d\underline{r} \epsilon(\underline{r}, t) = \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(\underline{r}, t))^2 \right)$

mit $\underline{E}(\underline{r}, t) = -\dot{\underline{A}}(\underline{r}, t)$

wegen $\rho=0$ und Coulombgleichung!

mit Ansatz für \underline{A} :

$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t)$

$\underline{E} = i \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} u_{\underline{k}} e^{-i\omega_{\underline{k}} t} - a_{\underline{k}}^* u_{\underline{k}}^* e^{+i\omega_{\underline{k}} t} \right)$

$\underline{B}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\underline{k}} (\nabla \times u_{\underline{k}}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + a_{\underline{k}}^* (\nabla \times u_{\underline{k}}^*) e^{+i\omega_{\underline{k}} t} \right)$

Betrachte zunächst elektrische Anteil zu Energie

$\int_G d\underline{r} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 = i^2 \sum_{\underline{k}, \underline{k}'} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}'}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_{\underline{k}} t} e^{-i\omega_{\underline{k}'} t} \int d\underline{r} u_{\underline{k}}(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r}) + i^2 \dots a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'}^* e^{+i\omega_{\underline{k}} t} e^{+i\omega_{\underline{k}'} t} \int d\underline{r} u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) u_{\underline{k}'}^*(\underline{r}) - i^2 \dots a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'}^* e^{-i\omega_{\underline{k}} t} e^{+i\omega_{\underline{k}'} t} \int d\underline{r} u_{\underline{k}}(\underline{r}) u_{\underline{k}'}^*(\underline{r}) - i^2 \dots a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'} e^{+i\omega_{\underline{k}} t} e^{-i\omega_{\underline{k}'} t} \int d\underline{r} u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r})$

Orthogonalität der u 's:

$\Rightarrow \int d\underline{r} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 = - \sum_{\underline{k}, \underline{k}'} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}'}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_{\underline{k}} t} e^{-i\omega_{\underline{k}'} t} \int d\underline{r} u_{\underline{k}}(\underline{r}) u_{\underline{k}'}(\underline{r}) - \dots$
 Komplex konjugiert (c.c.)

$$+ \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2 \epsilon_0} \right) a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2 \epsilon_0} \right) a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}$$

Magnetischer Anteil

Zu betrachten sind Terme der folgenden Art

i) $\int d\underline{r} (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})) (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r}))$

benutze Identität: $\nabla \cdot (\underline{u}_1 \times \underline{u}_2) = \underline{u}_2 \cdot (\nabla \times \underline{u}_1) - \underline{u}_1 \cdot (\nabla \times \underline{u}_2)$ (*)

hier: setze $\underline{u}_2 = \nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})$, $\underline{u}_1 = \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$

beliebige Vektorfelder

$$\int d\underline{r} \underline{u}_2 \cdot (\nabla \times \underline{u}_1) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\int_{\mathcal{O}_G} d\underline{F}(\underline{u}_1 \times \underline{u}_2)}_{\text{Gaußsche Integralsatz}} + \int d\underline{r} \underline{u}_1 \cdot (\nabla \times \underline{u}_2)$$

Null, da $\underline{A}(\underline{r}, t)$ und damit $\underline{u}_{\underline{k}}, \underline{u}_{\underline{k}'}$ auf dem Rand verschwinden:

$$= \int d\underline{r} (\nabla \times (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}))) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

benutze:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{F}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{F}) - \Delta \underline{F}$$

$$= \int d\underline{r} \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}))}_{\text{wegen Coulombbedingung}} \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r}) - \int d\underline{r} \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

$$= - \int d\underline{r} \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

$$= \frac{\omega_{\underline{k}}^2}{c^2} \int d\underline{r} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

Orthogonalität

$$= \frac{\omega_{\underline{k}}^2}{c^2} \delta_{\underline{k}\underline{k}'} = \omega_{\underline{k}}^2 \epsilon_0 / \mu_0 \delta_{\underline{k}\underline{k}'}$$

benutze:

$$\left(\Delta + \frac{\omega_{\underline{k}}^2}{c^2} \right) \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 / \mu_0$$

Außerdem treten Terme auf des Typs:

$$ii) \int d\underline{r} (\mathbf{P} \times \underline{u}_k(\underline{r})) / (\mathbf{P} \times \underline{u}_{k'}(\underline{r})) = \dots = \omega_k^2 \epsilon_0 \mu_0 \int d\underline{r} \underline{u}_k(\underline{r}) \underline{u}_{k'}(\underline{r})$$

Kombiniere elektrische und magnetische Anteil

$$\begin{aligned} E &= \int d\underline{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(\underline{r}, t))^2 \right) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\underline{k}, \underline{k}'} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar \omega_{k'}}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_k t} e^{-i\omega_{k'} t} \int d\underline{r} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r}) \\ &\quad - \text{c.c.} \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right) (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}) \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\underline{k}, \underline{k}'} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{k'} \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_k t} e^{-i\omega_{k'} t} \omega_k^2 \epsilon_0 \mu_0 \int d\underline{r} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r}) \\ &\quad + \text{c.c.} \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right) \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* \frac{\omega_k^2}{c^2} + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}} \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Man findet: Die 4 Terme mit Produkten der Form $a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'}$ bzw. $a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'}$ fallen sich gerade heraus!

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}) && \text{Beitrag aus } (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}) && \text{" " } (\underline{B}(\underline{r}, t))^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_k (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}})} \quad \text{immer noch klassisch!}$$

Quantisierung:

$$E \rightarrow \hat{H}$$

$$a_{\underline{k}} \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}, \quad a_{\underline{k}}^* \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}^\dagger \quad \text{mit} \quad [\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}^\dagger] = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$$

$$[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}] = 0$$

also bosonische Kommutatorrelation (wie bei Photonen!)

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_{\underline{y}} \hbar \omega_{\underline{y}} \left(\hat{a}_{\underline{y}}^\dagger \hat{a}_{\underline{y}} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\underline{y}} \hbar \omega_{\underline{y}} \left(\hat{N}_{\underline{y}} + \frac{1}{2} \right) \quad (*)$$



mit $\hat{N}_{\underline{y}} = \hat{a}_{\underline{y}}^\dagger \hat{a}_{\underline{y}}$

Hamiltonoperator des "freien" elektromagnetischen (Strahlung-) Feldes

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\underline{r}, t) = 0 \\ \mathbf{j}(\underline{r}, t) = 0 \end{array} \right.$$

Bemerkung

- Besitzt Analogie zum Hamiltonoperator des Schwingungssystems in Kap. IV.1. (Phononensystem)

Auch hier: \hat{H} beschreibt ein System von "Quantenfeldern"

In diesem Fall heißen die Quantenfelder "Photonen"

- Photonen sind Bosonen, wie durch die Kommutatorrelationen ausgedrückt

Argument, dass es tatsächlich Bosonen sind.

- man weiß, dass Photonen den Spin $s=1$ haben, also s ganzzahlig \rightarrow Bosonen

- Experimente (Wärmestrahlung) zeigen, dass die statistische Eigenschaften von Photonen durch die Bose-Einstein-Statistik erklärt werden können (Planck'sche Strahlungsgesetze)

- In Analogie zu Energie E werden auch die Felder $\underline{A}(\underline{r}, t)$ und $\underline{E}(\underline{r}, t)$ quantisiert

z.B. (im Schrödingerbild, d.h. ^{Operatoren} Zeitunabhängig)

$$\underline{\hat{A}}(\underline{r}) = \sum_{\underline{y}} \left(\frac{\hbar}{2 \omega_{\underline{y}} m_0} \right)^{1/2} \left(\hat{a}_{\underline{y}} \underline{u}_{\underline{y}}(\underline{r}) + \hat{a}_{\underline{y}}^\dagger \underline{u}_{\underline{y}}^*(\underline{r}) \right)$$

Operatoren des Vektorpotentials

Die Zeitentwicklung folgt „automatisch“ im Heisenbergbild

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \hat{a}_{k,H}(t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{a}_k e^{-i\hat{H}t} \\ \text{BWGL } \frac{d}{dt} \hat{a}_{k,H}(t) &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{a}_{k,H}(t)] = \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t} [\hat{H}, \hat{a}_k] e^{-i\hat{H}t} \\ &= i\omega_k e^{\dots} [\hat{N}_k, \hat{a}_k] e^{\dots} \\ &= \dots = -i\omega_k \hat{a}_k \\ \Rightarrow \hat{a}_{k,H}(t) &= e^{-i\omega_k t} \hat{a}_k \end{aligned}$$

IV.3. Einstaub: Herleitung von Kopplungen über Lagrange dichte

IV.3.1. Formalismus

Klass. Mechanik für Punktteilchen:

Lagrange funktion $L(q, \dot{q}, t)$, $q = q_1, \dots, q_f$ (f Freiheitsgrade)
 generalisierte Koordinaten

Klass. Feldtheorie

$$\begin{aligned} L &= \int d^3x \mathcal{L} \quad \text{mit } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \varphi_{i,\mu}) \quad \text{Lagrange dichte} \\ &= L(x^0) \\ &= L(t) \end{aligned}$$

$\varphi_i(x, t)$: Feld, z.B. Komponente des Vektorpotentials
 Index für Feld

$$\varphi_{i,\mu}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_i(x, t)$$

$x^\mu = (\underbrace{t}_{\text{Zeitkomponente}}, \underbrace{x, y, z}_{\text{Raumkomponente}})$ Viererschiebweise

$$\Rightarrow \varphi_{i,0}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = \dot{\varphi}_i$$

Es gibt (analog zur Klass. Punktmechanik) ein Wirkprinzip

Wirkung: $S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$
 Integral über Zeit und Raum

Hamilton'sches Prinzip $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} = 0$$

Euler-Lagrange
Gleichung für Felder

beachte Einstein'sche Summenkonvention!

$$\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Kanjugiertes Impulsfeld (zum Feld φ_i)

$$\Pi_{\varphi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = \Pi_i \quad (\text{analog zu } p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i})$$

Übergang zur Hamiltonformulie bzw. Hamiltondichte

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} = \sum_i \dot{\varphi}_i \Pi_i - \mathcal{L}$$

Quantisierung

Ausgehend von den Feldern φ_i und zugehörigen Impulsfeldern Π_{φ_i}

"Kochrezept"

$$\text{ersetze: } \varphi_i \rightarrow \hat{\varphi}_i \quad \Pi_{\varphi_i} \rightarrow \hat{\Pi}_{\varphi_i}$$

Kommutatorprinzip!

$$[\hat{\varphi}_i(x, t), \hat{\Pi}_j(y, t)]_{\pm} = i \hbar \delta_{ij} \delta(x - y)$$

mit $[\dots]_{-}$: Fermionen

$[\dots]_{+}$: Bosonen

Anwendungsbeispiel:

Ziel: Wir wollen die Lagrangeformulie anwenden, um die Stückchen gleich herzuleiten!

Feldvariablen: $\underbrace{\varphi(x, t)}_{\varphi_1}$, $\underbrace{\varphi^*(x, t)}_{\varphi_2}$ also zwei skalare Felder
Wellenfunktion

Lagrange-dicht. muß „gerade“ werden:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}^* \psi - \dot{\psi} \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \psi_{,k} \psi_{,k}^* - V(\mathbf{r}, t) \psi^* \psi$$

$\downarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}$
 räuml. Ableit.

Lagrange-Gleichung:

$$\textcircled{a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,k}} \stackrel{!}{=} 0$$

$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \quad (\mu=0,1,2,3)$

$$\textcircled{b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,k}^*} \stackrel{!}{=} 0$$

aus \textcircled{b} : $\frac{i\hbar}{2} \dot{\psi} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} \psi - V\psi + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \psi_{,l} \stackrel{!}{=} 0$

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + V\psi$$

mit $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\mathbf{r}, t)$, $V = V(\mathbf{r}, t)$ usw.

$$\boxed{i\hbar \dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)}$$

Ansatz für \mathcal{L} liefert die richtige Schrödingergleichung!

\textcircled{a} liefert dasselbe Gleichung, nur komplex konjugiert!