Elektrodynamik, Potentialgleichung in der Coulombeichung ($\nabla\cdot\underline{A}=0$) und $\rho(\underline{r},t)=0$, $\underline{j}(\underline{r},t)=0$

$$\underbrace{\Delta\phi(\underline{r},t)=0}_{\text{für alle Zeit Null!}}, \quad \underbrace{\Delta\underline{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}}=0}_{\text{relevante Gleichung}}$$

Lösung in einer Kavität

$$\underline{A}(\underline{r},t)=\sum_{\underline{k}}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_{\underline{k}}\,\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,e^{-i\omega_k t}+a_{\underline{k}}^*\,\underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})\,e^{+i\omega_k t}\right)$$

Eigenfrequenz

Moden

Coulombeichung: $\nabla\cdot\underline{u}_k(\underline{r})=0 \iff \underline{k}\cdot\underline{u}_k(\underline{r})=0$

$$\int_G d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})=\delta_{\underline{k},\underline{k}'}$$

G ← Kavität

$\boxed{\underline{A}=0 \text{ auf dem Rand von der Kavität}}$

und $\Delta\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})+\frac{\omega_k^2}{c^2}\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})=0$ damit Lösungsansatz für $\underline{A}$ die Potentialgleichung erfüllt!

Energie des elektromagnetischen Feldes

$$E=\int d\underline{r}\;\underbrace{\varepsilon(\underline{r},t)}_{\text{Energiedichte}}=\int d\underline{r}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2+\frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2\right)$$

mit $\underline{E}(\underline{r},t)=-\dot{\underline{A}}(\underline{r},t)$

wegen $\rho=0$ und Coulombeichung!

$\underline{B}(\underline{r},t)=\nabla\times\underline{A}(\underline{r},t)$

mit Ansatz für $\underline{A}$:

$$\underline{E}(\underline{r},t)=i\sum_{\underline{k}}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_{\underline{k}}\,\underline{u}_{\underline{k}}\,e^{-i\omega_k t}-a_{\underline{k}}^*\,\underline{u}_{\underline{k}}^*\,e^{+i\omega_k t}\right)$$

$$\underline{B}(\underline{r},t)=\sum_{\underline{k}}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_{\underline{k}}(\nabla\times\underline{u}_{\underline{k}})e^{-i\omega_k t}+a_{\underline{k}}^*(\nabla\times\underline{u}_{\underline{k}}^*)\,e^{i\omega_k t}\right)$$

Betrachte zunächst elektrischen Anteil zu Energie

$$\begin{aligned}\int_G d\underline{r}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 = {} & i^2\sum_{\underline{k},\underline{k}'}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar\omega_{k'}}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}}a_{\underline{k}'}\,e^{-i\omega_k t}e^{-i\omega_{k'} t}\int d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})\\ & + i^2 \;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; a_{\underline{k}}^*a_{\underline{k}'}^*\,e^{i\omega_k t}e^{i\omega_{k'} t}\int d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})\\ & - i^2 \;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; a_{\underline{k}}a_{\underline{k}'}^*\,e^{-i\omega_k t}e^{i\omega_{k'} t}\underbrace{\int d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})}_{\delta_{\underline{k},\underline{k}'}}\\ & - i^2 \;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; a_{\underline{k}}^*a_{\underline{k}'}\,e^{i\omega_k t}e^{-i\omega_{k'} t}\underbrace{\int d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})}_{\delta_{\underline{k},\underline{k}'}}\end{aligned}$$

Orthogonalität der $\underline{u}$'s:

$$\Longrightarrow \int d\underline{r}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2=-\sum_{\underline{k},\underline{k}'}\left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar\omega_{k'}}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\underbrace{a_{\underline{k}}a_{\underline{k}'}\,e^{-i\omega_k t}e^{-i\omega_{k'} t}\int d\underline{r}\;\underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\,\underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})}_{\text{Komplex konjugiert ("c.c.")}}$$

$$-\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}$$

$$+ \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right) a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right) a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}$$

Magnetischer Anteil

Zu betrachten sind Terme der folgenden Art

i) $\int d\underline{r} \, (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})) (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r}))$

beliebige Vektorfelder

benutze Identität: $\nabla \cdot (\underline{u}_1 \times \underline{u}_2) = \underline{u}_2 \cdot (\nabla \times \underline{u}_1) - \underline{u}_1 (\nabla \times \underline{u}_2)$ (*)

hier: setze $\underline{u}_2 = \nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})$, $\underline{u}_1 = \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$

$$\int d\underline{r} \; \underline{u}_2 \cdot (\nabla \times \underline{u}_1) \overset{(*)}{=} \underbrace{\overbrace{\oint_{O_G} d\underline{F} \, (\underline{u}_1 \times \underline{u}_2)}^{\text{Gaussscher Integralsatz}}}_{\substack{\text{Null, da} \\ \underline{A}(\underline{r},t) \text{ und damit} \\ \underline{u}_k,\, \underline{u}_{k'} \text{ auf dem} \\ \text{Rand verschwinden!}}} + \int d\underline{r} \; \underline{u}_1 \cdot (\nabla \times \underline{u}_2)$$

$$= \int d\underline{r} \left(\nabla \times (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\right) \cdot \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

benutze:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{F}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{F}) - \Delta \underline{F}$$

$$= \int d\underline{r} \; \nabla \underbrace{\left(\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\right)}_{\substack{0 \\ \text{wegen Coulombeichung}}} \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r}) - \int d\underline{r} \; \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \, \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

$$= - \int d\underline{r} \; \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \, \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

benutze: $\left(\Delta + \frac{\omega_k^2}{c^2}\right) \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$

$$= \frac{\omega_k^2}{c^2} \int d\underline{r} \; \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) \, \underline{u}_{\underline{k}'}^*(\underline{r})$$

Orthogonalität

$$= \frac{\omega_k^2}{c^2} \delta_{\underline{k},\underline{k}'} = \omega_k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \, \delta_{\underline{k},\underline{k}'}$$

$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$

Außerdem treten Terme auf des Typs:

ii) $\int d\underline{r}\, (\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}))(\nabla \times \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})) = \ldots\ldots = \omega_k^2 \varepsilon_0\mu_0 \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\, \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$

Kombiniere elektrische und magnetische Anteil

$$E = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2 \right)$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_{k'}}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_k t} e^{-i\omega_{k'} t} \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\, \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

$$- \text{ c.c.}$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}\right) \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{k'}\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'} e^{-i\omega_k t} e^{-i\omega_{k'} t}\, \omega_k^2 \varepsilon_0\mu_0 \int d\underline{r}\, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r})\, \underline{u}_{\underline{k}'}(\underline{r})$$

$$+ \text{ c.c.}$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right) \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* \frac{\omega_k^2}{c^2} + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}} \frac{\omega_k^2}{c^2}\right)$$

Man findet: Die 4 Terme mit Produkten der Form $a_{\underline{k}} a_{\underline{k}'}$ bzw $a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}'}^*$ heben sich gerade heraus!

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right) \qquad \text{Beitrag aus } \left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right) \qquad \text{" } \text{"} \left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \hbar\omega_k \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}}\right)}$$ immer noch klassisch!

Quantisierung:

$E \rightarrow \hat{H}$

$a_{\underline{k}} \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}$, $a_{\underline{k}}^* \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}^+$ mit $[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}^+] = \delta_{\underline{k},\underline{k}'}$

$[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}] = 0$

also bosonische Kommutatorrelation (wie bei Phononen!)

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{a}_{\underline{k}}^{+} \hat{a}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right)} \quad (*)$$

mit $\hat{N}_{\underline{k}} = \hat{a}_{\underline{k}}^{+} a_{\underline{k}}$

Hamiltonoperator des "freien" elektromagnetischen (Strahlungs-) Feldes

($\rho(\underline{r},t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r},t) = 0$

Bemerkungen

- Beachte Analogie zum Hamiltonoperator des Schwingungssystems (Phononensystems) in Kap IV.1.

  Auch hier: $\hat{H}$ beschreibt ein System von „Quasiteilchen"

  In diesem Fall heißen die Quasiteilchen „Photonen"

- Photonen sind Bosonen, wie durch die Kommutatorrelationen ausgedrückt

  Argumente, dass es tatsächlich Bosonen sind.

  - man weiß, dass Photonen den Spin $s=1$ haben, also s ganzzahlig $\rightarrow$ Bosonen

  - Experimente (Wärmestrahlung) zeigen, dass die statistischen Eigenschaften von Photonen durch die Bose-Einstein-Statistik erklärt werden können (Planck'sche Strahlungsformel)

- In Analogie zur Energie E werden auch die Felder $\underline{A}(\underline{r},t)$ und $\underline{E}(\underline{r},t)$ quantisiert

  z.B. (im Schrödingerbild, d.h. Operatoren zeitunabhängig)

$$\underline{\hat{A}}(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2 \omega_k \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_{\underline{k}} \, \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) + \hat{a}_{\underline{k}}^{+} \underline{u}_{\underline{k}}^{*}(\underline{r}) \right)$$

Operator des Vektorpotentials

Die Zeitabhängigkeit folgt „automatisch" im Heisenbergbild

z.B. $\hat{a}_{\underline{k},H}(t) = e^{i/\hbar \hat{H} t}\, \hat{a}_{\underline{k}}\, e^{-i/\hbar \hat{H} t}$

BWGL $\frac{d}{dt}\hat{a}_{\underline{k},H}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_H, \hat{a}_{\underline{k},H}(t)] = \frac{i}{\hbar} e^{i/\hbar \hat{H} t}[\hat{H}, \hat{a}_{\underline{k}}]\, e^{-i/\hbar \hat{H} t}$

$= i\omega_k\, e^{\cdots}\, [\hat{N}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}}]\, e^{\cdots}$

$= \ldots = -i\omega_k \hat{a}_{\underline{k}}$

$\Rightarrow \hat{a}_{\underline{k},H}(t) = e^{-i\omega_k t}\, \hat{a}_{\underline{k}}$

IV.3. Einschub: Herleitung von Kopplungen über Lagrangedichte

IV.3.1. Formalismus

Klass. Mechanik für Punktteilchen:

Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$, $q = q_1, \ldots, q_f$ (f Freiheitsgrade)

$\underbrace{}$ generalisierte Koordinaten

Klass. Feldtheorie

$L = \int d\underline{r}\, \mathcal{L}$ mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \varphi_{i,\mu})$ Lagrangedichte

$= L(x^0)$

$= L(t)$

$\varphi_i(\underline{r}, t)$: Feld, z.B. Komponente des Vektorpotentials

Index für Feld

$$\varphi_{i,\mu}(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_i(\underline{r},t)$$

Viererschreibweise

$$x^\mu = (\underbrace{t}_{\text{Zeitkomponente}}, \underbrace{x, y, z}_{\text{Raumkomponente}})$$

$$\Rightarrow \varphi_{i,0}(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i = \dot{\varphi}_i$$

Es gilt (analog zur klass. Punktmechanik) ein Wirkungsprinzip

Wirkung: $S = \underbrace{\int d^4x}_{\text{Integral über Zeit und Raum}}\, \mathcal{L} = \int dx^0\, L$

Hamilton'sches Prinzip $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}} = 0}$$

Euler-Lagrange Gleichung für Felder

beachte Einstein'sche Summenkonvention!

völlig analog zu
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Konjugiertes Impulsfeld (zum Feld φ_i)

$$\Pi_{\varphi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = \Pi_i \qquad \left(\text{analog zu } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

Übergang zur Hamiltonfunktion bzw. Hamiltondichte

$$H = \int d\underline{r}\; \mathcal{H} \qquad \text{mit } \mathcal{H} = \sum_i \dot{\varphi}_i \Pi_i - \mathcal{L}$$

<u>Quantisierung</u>

Ausgehend von den Feldern φ_i und zugehörigen Impulsfeldern Π_{φ_i}

"Kochrezept"

ersetze: $\varphi_i \to \hat{\varphi}_i \qquad \Pi_{\varphi_i} \to \hat{\Pi}_{\varphi_i}$

Korrespondenzprinzip! $\varphi_i^* \to \hat{\varphi}_i^+$

$$\left[\hat{\varphi}_i(\underline{r},t), \Pi_{\varphi_j}(\underline{r}',t)\right]_\pm = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

mit $[\ldots]_-$: Fermionen

$[\ldots]_+$: Bosonen

<u>Anwendungsbeispiel</u>:

Ziel: Wir wollen die Lagrangetechnik anwenden, um die <u>Schrödingergleichung</u> herzuleiten!

Feldvariablen: $\overbrace{\varphi(\underline{r},t)}^{\varphi_1}, \overbrace{\varphi^*(\underline{r},t)}^{\varphi_2}$ also zwei skalare Felder

Wellenfunktion

Lagrangedichte muß „geraten" werden:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} \psi_{,k}\,\psi^*_{,k} - V(\underline{r},t)\,\psi^*\psi$$

$\psi_{,k} = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ räuml. Ableitung

~~Gl.~~ Lagrange-Gleichungen:

(a) $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,k}}}_{-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}}\quad(\mu=0,1,2,3)} \stackrel{!}{=} 0$$

(b) $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*_{,k}} \stackrel{!}{=} 0$$

aus (b): $$\frac{i\hbar}{2}\dot{\psi} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\psi - V\psi + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\psi_{,l} \stackrel{!}{=} 0$$

$$i\hbar\,\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} + V\psi$$

mit $\dot{\psi} = \dot{\psi}(\underline{r},t)$, $V = V(\underline{r},t)$ usw.

$$\boxed{i\hbar\,\dot{\psi}(\underline{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\underline{r},t) + V(\underline{r},t)\,\psi(\underline{r},t)}$$

Ansatz für $\mathcal{L}$ liefert die richtige Schrödingergleichung!

(a) liefert dieselbe Gleichung, nur komplex konjugiert!