Ergebnis für den effektiven Hamiltonian (nach Bogoliubov-Transformation)

$$\hat{H}_{eff} = \sum_{\underline{k}\neq 0} \left(\omega_k \left(\alpha^+_{\underline{k}} \alpha_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\varepsilon_{\underline{k}} + \frac{N_0}{V} (\tilde{V}_0 + \tilde{V}_{\underline{k}}) \right)}_{\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}}} \right) + \frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V}$$

schwach wechselwirkende Bosonen

(denn Wechselw. zwischen angeregten Bosonen wurde vernachlässigt, $N_0 \gg 1$)

$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\tilde{V}_0, \tilde{V}_{\underline{k}}$ Fourierkomponente des Wechselwirkungspotentials

N_0: Zahl der "echten" Bosonen im Grundzustand

$$\omega_k = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}}^2 - \left(\frac{N_0 \tilde{V}_{\underline{k}}}{V}\right)^2}$$

$\alpha^+_{\underline{k}}, \alpha_{\underline{k}}$: "neuen" Erzeuger und Vernichter (Linearkombination von $\hat{a}^+_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}}$)

Etwas umschreiben:

$$\hat{H}_{eff} = \underbrace{\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V} - \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}\neq 0} (\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}} - \omega_{\underline{k}})}_{} + \underbrace{\sum_{\underline{k}\neq 0} \omega_k \hat{\alpha}^+_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}}}_{}$$

„Grundzustandsenergie" im Falle von (schwachen) Wechselwirkung!

Energie aus „Anregungen" von Quasiteilchen

Summe von Oszillatoren mit Energie ω_k

Bemerkungen:

- die Grundzustandsenergie ist offensichtlich ungleich Null!!
  (anders als im idealen Bosegas, dort ist die Energie Null !!)

- Limes des obigen Ausdrucks bei Verschwinden der Wechselwirkung:

  $\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V} \longrightarrow 0$ (wegen $\tilde{V}_0 = 0$)

  $\tilde{\varepsilon}_k \rightarrow \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow 0$ für $k \to 0$

  $\omega_{\underline{k}} \rightarrow \varepsilon_k$

  $\Rightarrow$ der ganze Ausdruck verschwindet!

  Konsistenz mit idealem Bosegas für $\tilde{V} \to 0$

- Im Falle von Wechselwirkung enthält die Grundzustandsenergie einen Beitrag von Termen $\underline{k}\neq 0$

Der Grundzustand an sich ist dadurch festgelegt, dass keine Quasiteilchen "angeregt" sind $\Leftrightarrow$ Die Zahl der Quasiteilchen im Grundzustand ist Null!

formal: $\hat{\alpha}_{\underline{k}} \overset{\text{Grundzustand}}{|\Psi_0\rangle} = 0 \quad \forall \underline{k}$ (da $|\Psi_0\rangle$ keine Quasiteilchen)

$$\Rightarrow \langle\Psi_0|\underbrace{\hat{\alpha}^+_{\underline{k}}\hat{\alpha}_{\underline{k}}}_{\substack{\text{Besetzungszahloperator} \\ \text{für Quasiteilchen} \\ \text{mit Impuls } \underline{k}}}|\Psi_0\rangle = \langle\underbrace{\hat{\alpha}_{\underline{k}}\Psi_0}_{0}|\underbrace{\hat{\alpha}_{\underline{k}}\Psi_0}_{0}\rangle = 0 \qquad \forall \underline{k}$$

Beachte:
In Anwesenheit von Wechselwirkung enthält der Grundzustand echte Bosonen (keine Quasiteilchen) mit Impuls $\underline{k}\neq 0$!

Deren Zahl ist gegeben durch

$$N' = \langle\Psi_0|\sum_{\underline{k}\neq 0}\hat{a}^+_{\underline{k}}\hat{a}_{\underline{k}}|\Psi_0\rangle$$

$$= \sum_{\underline{k}\neq 0}\langle\Psi_0|\left(u_{\underline{k}}\hat{\alpha}^+_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}\hat{\alpha}_{-\underline{k}}\right)\left(u_{\underline{k}}\hat{\alpha}_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}\hat{\alpha}^+_{-\underline{k}}\right)|\Psi_0\rangle$$

$$= \sum_{\underline{k}\neq 0}\Big(u_{\underline{k}}^2 \overbrace{\langle\Psi_0|\hat{\alpha}^+_{\underline{k}}\underbrace{\hat{\alpha}_{\underline{k}}|\Psi_0\rangle}_{0}}^{\text{Zahl der Quasiteilchen im Grundzustand}} + u_{\underline{k}}v_{\underline{k}}\overbrace{\langle\Psi_0|\hat{\alpha}^+_{\underline{k}}\hat{\alpha}^+_{-\underline{k}}|\Psi_0\rangle}^{0}$$

$$+ u_{\underline{k}}v_{\underline{k}}\langle\Psi_0|\hat{\alpha}_{-\underline{k}}\underbrace{\hat{\alpha}_{\underline{k}}|\Psi_0\rangle}_{0} + v_{\underline{k}}^2\langle\Psi_0|\hat{\alpha}_{-\underline{k}}\hat{\alpha}^+_{-\underline{k}}|\Psi_0\rangle\Big)$$

benutze Def. des Grundzustand $\hat{\alpha}_{\underline{k}}|\Psi_0\rangle = 0$

$$= \sum_{\underline{k}\neq 0} v_{\underline{k}}^2\langle\Psi_0|\underbrace{\hat{\alpha}_{-\underline{k}}\hat{\alpha}^+_{-\underline{k}}}_{1+\hat{\alpha}^+_{\underline{k}}\hat{\alpha}_{\underline{k}}}|\Psi_0\rangle = \sum_{\underline{k}\neq 0} v_{\underline{k}}^2\Big(\underbrace{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle}_{1} + \underbrace{\langle\Psi_0|\hat{\alpha}^+_{-\underline{k}}\hat{\alpha}_{-\underline{k}}|\Psi_0\rangle}_{0}\Big)$$

$$= \sum_{\underline{k} \neq 0} v_{\underline{k}}^2 > 0 \quad , \text{ mit } v_{\underline{k}}^2 = \frac{-\omega_{\underline{k}} + \tilde{\varepsilon}_{\underline{k}}}{2\,\omega_{\underline{k}}}$$

Vergleich mit wechselwirkungsfreiem Fall: (ideales Bosegas): $N' = 0$!!
alle Bosonen im Grundzustand haben Impuls $\underline{k} = 0$!

Das jetzige Ergebnis ist konsistent damit, denn für $\tilde{V}_{\underline{k}} \to 0$ ergibt sich
$\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}} \to \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\omega_{\underline{k}} \to \varepsilon_{\underline{k}} \Longrightarrow v_{\underline{k}} = 0$!!

Zusammenfassung: Der Grundzustand enthält Bosonen mit $\underline{k} = 0$ („Kondensat" Bose-Einstein),
aber auch Bosonen mit $\underline{k} \neq 0$
Er enthält keine Quasiteilchen

Resultate für den Spezialfall einer Kontaktwechselwirkung $V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = \lambda\, \delta(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$ (Stärke der Wechselwirkung)
(→ Buch Schwabl)
$$\Rightarrow \tilde{V}_{\underline{k}} = \lambda \quad \forall\, \underline{k}$$

- Zahl der echten Teilchen im Grundzustand mit $\underline{k} \neq 0$

$$\rho' = \frac{N'}{V} = \ldots = \frac{m^{3/2}}{3\pi^2}\, \lambda\, \rho^{3/2}$$

Gesamtdichte $\rho = \frac{N}{V}$
mit $N = N_0 + N'$
Zahl der Teilchen im Kondensat ($\underline{k} = 0$)

- Temperaturabhängigkeit der Zahl der Teilchen im Kondensat

$$\frac{N_0(T)}{V} = \frac{N_0(T=0)}{V} - \frac{m}{12\sqrt{\frac{\rho\lambda}{m}}}\, (kT)^2$$

(m Masse)

„Entleerung" des Kondensats

Dispersionsrelation der Quasiteilchen

Erinnerung: $\hat{H}_{eff}$ enthält den Quasiteilchenterm $\sum_{\underline{k}\neq 0} \omega_k \hat{\alpha}^+_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}}$

es war:
$$\omega_{\underline{k}} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}}^2 - \frac{N_0^2 \hat{V}_{\underline{k}}^2}{V^2}}$$

Abhängigkeit von der Wellenzahl k? (→ Dispersionsrelation)

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + \frac{N_0}{V}(\hat{V}_0+\hat{V}_{\underline{k}})\right)}_{\tilde{\varepsilon}_k}^2 - \frac{N_0^2 \hat{V}_{\underline{k}}^2}{V^2}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)^2}_{\sim k^4} + \underbrace{\frac{\hbar^2k^2N_0}{mV}(\hat{V}_0+\hat{V}_{\underline{k}})}_{\sim k^2} + \cancel{\frac{N_0^2\hat{V}_0^2}{V^2}} + \frac{2N_0\hat{V}_0\hat{V}_{\underline{k}}}{V} - \cancel{\frac{N_0^2\hat{V}_{\underline{k}}^2}{V^2}}}$$

(Term aufgrund der Wechselwirkung!)

- Betrachte Grenzfall $k \to 0$: Dann folgt (unter der Annahme, dass $\hat{V}_0$ existiert)

$$\omega_k \sim k$$

(der k^4-Term unter der Wurzel kann vernachlässigt werden gegenüber dem k^2-Term)

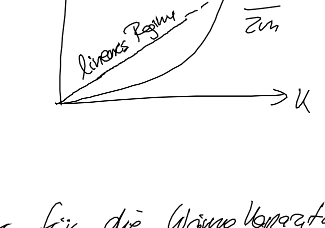
Lineare Dispersionsrelation

„phononenartig" (Phonon $\hat{=}$ Gitterschwingung)

- Betrachte große Wellenzahl $k \to \infty$

$$\omega_k \sim \frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

quadratische Dispersion wie bei freien Teilchen!



Folgerungen für die Wärmekapazität $C_V = \left.\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\right|_V$ mittlere Energie

Zur Berechnung der mittleren Energie $\langle E\rangle$ kann man wie im idealen Fall vorgehen da wir mit $\hat{H}_{eff}$ ein effektives Einteilchenproblem haben!

$$\langle E \rangle = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\underline{p}\ \underbrace{\varepsilon(\underline{p})}_{\text{effektive Einteilchenenergie}}\, n_{\underline{p}}$$

Siehe VL Thermodynamik & Statistik

$\varepsilon(\underline{p}) = \omega_{\underline{k}}$

$\underline{p} = \hbar \underline{k}$

V groß $\Rightarrow$ Kontinuumslimes

$n_{\underline{p}}$ mittlere Besetzungszahl
Einteilchenstatistik der Quasiteilchen (Bosonen!)

$$n_{\underline{p}} = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon(\underline{p})} - 1}$$

Bose-Einstein-Statistik

mit $\mu = 0$

es kostet keine Arbeit, Quasiteilchen zu erzeugen!

$\beta = \frac{1}{k_B T}$

man findet:

$$\langle E \rangle \sim T^4$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}\Big|_V \sim T^3$$

bei tiefen Temperaturen, wo $\omega_k \sim k$

Eine solche Temperaturabhängigkeit von C_V findet man tatsächlich (bei tiefen Temperaturen) in echten Bosonsystemen, z.B. Helium 4

aber: Dort es gibt noch weitere Anregungen, die wir hier nicht behandelt haben!