

Ergebnis für die effektive Hamiltonian (nach Bogoliubov-Transformation)

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\underline{k} \neq 0} \left(\omega_{\underline{k}} \left(\hat{\alpha}_{\underline{k}}^{\dagger} \hat{\alpha}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\underline{k}} + \frac{N_0}{V} (\tilde{V}_0 + \tilde{V}_{\underline{k}}) \right) \right) + \frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V}$$

$\epsilon_{\underline{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\tilde{V}_0, \tilde{V}_{\underline{k}}$ Fourierkomponente des Wechselwirkungspotentials

N_0 : Zahl der Bosonen im Grundzustand "echten"

$$\omega_{\underline{k}} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\underline{k}}^2 - \left(\frac{N_0 \tilde{V}_{\underline{k}}}{V} \right)^2}$$

$\hat{\alpha}_{\underline{k}}^{\dagger}, \hat{\alpha}_{\underline{k}}$: "neuen" Erzeuger und Vernichter (Umwandlungsmatrix von $\hat{a}_{\underline{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\underline{k}}$)

Schwach wechselwirkende Bosonen (dem Wechselw. zwischen angeregten Bosonen wurde vernachlässigt! $N_0 \gg 1$)

Etwas umschreiben:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \underbrace{\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V} - \frac{1}{2} \sum_{\underline{k} \neq 0} (\tilde{\epsilon}_{\underline{k}} - \omega_{\underline{k}})}_{\text{"Grundzustandsenergie" im Falle von (schwachen) Wechselwirkung!}} + \underbrace{\sum_{\underline{k} \neq 0} \omega_{\underline{k}} \hat{\alpha}_{\underline{k}}^{\dagger} \hat{\alpha}_{\underline{k}}}_{\text{Energie aus "Anregungen" von Quasiteilchen}}$$

Summe von Oszillatoren mit Energie $\omega_{\underline{k}}$

Bemerkungen:

- die Grundzustandsenergie ist offensichtlich ungleich Null!! (anders als im idealen Bosegas, dort ist die Energie Null !!)

- Umso der doppelte Ausdruck bei Verschwinden der Wechselwirkung:

$$\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2V} \rightarrow 0 \quad (\text{wegen } \tilde{V}_0 = 0)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\underline{k}} \rightarrow \epsilon_{\underline{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow 0$$

$$\omega_{\underline{k}} \rightarrow \epsilon_{\underline{k}}$$

\Rightarrow der ganze Ausdruck verschwindet!

Vorsicht mit idealen Bosegas für $\tilde{V} \rightarrow 0$

- im Falle von Wechselwirkung enthält die Grundzustandsenergie einen Beitrag von Termen $k \neq 0$

Da Grundzustand an sich ist dadurch festgelegt, dass keine Quantität den "eigenst" sind \Leftrightarrow Die Zahl der Quasiteilchen im Grundzustand ist Null!

formal: $\hat{a}_k | \psi_0 \rangle = 0 \quad \forall k$ (da $|\psi_0\rangle$ keine Quantität)

$$\Rightarrow \langle \psi_0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \psi_0 \rangle = \langle \hat{a}_k \psi_0 | \hat{a}_k \psi_0 \rangle = 0 \quad \forall k$$

Besetzungszahloperator für Quasiteilchen mit Impuls k

Beachte:
In Anwesenheit von Wechselwirkungen enthält der Grundzustand echte Bosonen (keine Quasiteilchen) mit Impuls $k \neq 0$!

Diese Zahl ist gegeben durch

$$N' = \langle \psi_0 | \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \psi_0 \rangle$$

$$= \sum_{k \neq 0} \langle \psi_0 | (u_k \hat{a}_k^\dagger + v_k \hat{a}_{-k}) (u_k \hat{a}_k + v_k \hat{a}_{-k}^\dagger) | \psi_0 \rangle$$

$$= \sum_{k \neq 0} \left(\underbrace{u_k^2 \langle \psi_0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \psi_0 \rangle}_{\substack{\text{Zahl der Quasiteilchen im} \\ \text{Grundzustand}}} + u_k v_k \langle \psi_0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger | \psi_0 \rangle + u_k v_k \langle \psi_0 | \hat{a}_{-k} \hat{a}_k | \psi_0 \rangle + v_k^2 \langle \psi_0 | \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger | \psi_0 \rangle \right)$$

benutze Def. des Grundzustand $\hat{a}_k | \psi_0 \rangle = 0$

$$= \sum_{k \neq 0} u_k^2 \langle \psi_0 | \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger | \psi_0 \rangle = \sum_{k \neq 0} v_k^2 \left(\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} | \psi_0 \rangle \right)$$

$$= \sum_{\underline{k} \neq 0} v_{\underline{k}}^2 > 0, \quad \text{mit } v_{\underline{k}}^2 = \frac{-\omega_{\underline{k}} + \tilde{\epsilon}_{\underline{k}}}{2\omega_{\underline{k}}}$$

Vergleich mit unbeschleunigter Fall: (ideales Bosegas): $N' = 0$!!
 alle Boson im Grundzustand
 keine Teilchen $\underline{k} \neq 0$

Das jetzige Ergebnis ist konsistent damit, denn für $\tilde{v}_{\underline{k}} \rightarrow 0$ ergibt sich
 $\tilde{\epsilon}_{\underline{k}} \rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \omega_{\underline{k}} \rightarrow \epsilon_{\underline{k}} \Rightarrow v_{\underline{k}} = 0$!!

Zusammenfassung: Der Grundzustand enthält Bosonen mit $\underline{k} = 0$ (Bose-Einstein Kondensat), aber auch Bosonen mit $\underline{k} \neq 0$. Er enthält keine Quantenteile.

Resultate für den Spezialfall einer ^{Stärke der Wechselwirkung} konstanten Wechselwirkung
 (\rightarrow Schrödinger) $V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = \lambda \delta(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$
 $\Rightarrow \tilde{v}_{\underline{k}} = \lambda \quad \forall \underline{k}$

• ^{eben} Zahl der Teilchen im Grundzustand mit $\underline{k} \neq 0$

$$S' = \frac{N'}{V} = \dots = \frac{m^{3/2}}{3\pi^2} \lambda^{3/2} \quad \text{Gesamtdichte } S = \frac{N}{V}$$

mit $N = N_0 + N'$
 Zahl der Teilchen im Kondensat ($\underline{k} = 0$)

• Temperaturabhängigkeit der Zahl der Teilchen im Kondensat

$$\frac{N_0(T)}{V} = \frac{N_0(T=0)}{V} - \frac{m}{12 \sqrt{\pi^3}} (kT)^2 \quad (\text{m Masse})$$

↳ "Entleerung" des Kondensats

Dispersionsrelation der Quasiteilchen

Erinnerung: \hat{H}_{eff} enthält die Quasiteilchenform $\sum_{\underline{k} \neq 0} \omega_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}}^\dagger \hat{a}_{\underline{k}}$

es war:

$$\omega_{\underline{k}} = \sqrt{\epsilon_{\underline{k}}^2 - \frac{N_0^2 \vec{v}_{\underline{k}}^2}{V^2}}$$

Abhängigkeit von der Wellenzahl \underline{k} ?
(\Rightarrow Dispersionsrelation)

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{N_0}{V} (\vec{v}_0 + \vec{v}_{\underline{k}}) \right)^2}_{\epsilon_{\underline{k}}^2} - \frac{N_0^2 \vec{v}_{\underline{k}}^2}{V^2}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2}_{\sim k^4} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2 N_0}{mV} (\vec{v}_0 + \vec{v}_{\underline{k}})}_{\sim k^2} + \frac{N_0^2 \vec{v}_0^2}{V^2} + \frac{2 N_0 \vec{v}_0 \vec{v}_{\underline{k}}}{V} - \frac{N_0^2 \vec{v}_{\underline{k}}^2}{V^2}}$$

(Term aufgrund der Wechselwirkung!)

• Betrachte Grenzfall $k \rightarrow 0$: Dann folgt (unter der Annahme, dass \vec{v}_0 existiert)

$$\omega_{\underline{k}} \sim k$$

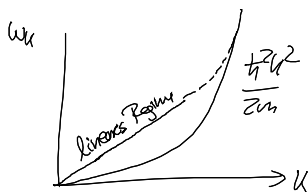
(der k^4 -Term unter der Wurzel kann vernachlässigt werden gegenüber dem k^2 -Term)

Lineare Dispersionsrelation

„phononartig“ (Phonon $\hat{=}$ Gitterschwingung)

• Betrachte große Wellenzahl $k \rightarrow \infty$

$$\omega_{\underline{k}} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{quadratische Dispersion wie bei freien Teilchen!}$$



mittlere Energie

Folgerung für die Wärmekapazität $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} / V$

Zur Berechnung der ^{mittleren} Energie $\langle E \rangle$ kann man wie im idealen Gas vorgehen da wir mit \hat{H}_{eff} ein effektives Ein-Teilchenproblem haben!

$$\langle E \rangle = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \, \epsilon(p) n_p$$

Siehe VL Thermodynamik & Statistik

effektive
Einknotenenergie
 $\epsilon(p) = \hbar^2 k^2 / 2m$

$$p = \hbar k$$

V groß \rightarrow Kontinuumslimes

n_p mittlere Besetzungszahl
Einknotenstatistik der Quantenteilchen (Bosonen)

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta \epsilon(p)} - 1}$$

Bose-Einstein-
Statistik

mit $\mu = 0$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

es kostet keine Arbeit
Quantenteilchen zu erzeugen!

man findet:

$$\langle E \rangle \sim T^4$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \Big|_V \sim T^3$$

bei tiefen Temperaturen, wo $\omega_k \sim \hbar k^2$

Eine solche Temperaturabhängigkeit von C_V findet man tatsächlich
(bei niedrigen Temperaturen) in echten Bose-Systemen, z.B. Helium 4

aber: Das es gibt noch weitere Anregungen, die wir hier nicht
behandelt haben!