Beispiele für Hamiltonfunktionen

a) freies Teilchen

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \quad , \quad \text{aus } L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

b) Teilchen im Potential $V(\vec{r},t)$

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r},t) \quad , \quad \text{aus } L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r},t)$$

c) Teilchen im elektromagnetischen Feld: $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \partial_t \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{E}_L(\vec{r},t) + \vec{E}_T(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

enthält als Spezialfall die Fall a) und b)

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \quad , \quad \text{aus } L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\phi + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}}_{\text{stellt Lorentzkraft sicher}}$$

Teilchen im elektromagn. Feld ϕ, $\vec{A}$ wird dargestellt durch

$$H(\vec{p},\vec{r}) \rightarrow H(\vec{p}-q\vec{A},\vec{r}) + q\phi$$

Beweis: $H = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} - L$ (Start)

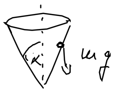
$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \longrightarrow \dot{\vec{r}} = (\vec{p}-q\vec{A})\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow H = H(\vec{p},\vec{r}) = \frac{(\vec{p}-q\vec{A})}{m}\cdot\vec{p} - \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\right)^2 + q\phi - \frac{q}{m}(\vec{p}-q\vec{A})\cdot\vec{A}$$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})}{m}(\vec{p} - q\vec{A}) - \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}\right)^2 + q\phi$$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \quad \checkmark$$

d) Illustration H-Technik: Kegel:



1. $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\alpha$$

2. $$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi} \quad , \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

3. $$H = H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos\alpha$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^2\alpha} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2\alpha \frac{p_\varphi^2}{(m r^2 \sin^2\alpha)^2}\right) + mgr\cos\alpha$$

$$\downarrow \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

4. $$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3 \sin^2\alpha} - mg\cos\alpha$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\alpha}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \longrightarrow \quad p_\varphi = \text{konstant, Erhaltungsgröße}$$

von φ hängt H nicht ab

Sprechweise: „φ ist eine zyklische Koordinate"

$\rightarrow$ 4 gekoppelte Dgl. 1. Ordnung $\hat{=}$ 2 Dgl. 2. Ordnung. (Lagrangebeschreibung)

Lagrangegl. 2. Art durch differenzieren:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2\alpha} - g\cos\alpha \qquad \checkmark \text{ bereits bekannt}$$

4.2. Kanonische Transformationen (KT)

Ziel: Vereinfachung von H (am besten Null) in einem neuen Koordinatensystem, oder: $\vec{A}, \phi \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$.

$$\{q_k, p_k\} \underset{KT}{\rightarrow} \{Q_k, P_k\}, \quad H(q_k, p_k) \underset{KT}{\rightarrow} H'(Q_k, P_k)$$

Kanonische Transformation ist Transformation auf neue Koordinaten Q_k, P_k wobei die Hamiltongleichungen ihre Form behalten:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} \qquad \text{„Forminvarianz"}$$

2 Schritte zur Konstruktionsvorschrift:

1. Wie kann L verändert werden, ohne die Hamiltongl. zu ändern?
2. Konstruktionsvorschrift: $H \underset{?}{\rightarrow} H'$

4.2.1. Invarianz d. Wirkprinzips bei Eichung der Lagrangefunktion

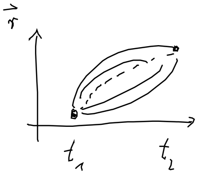
$\exists$ Freiheit in Wahl von L: $\quad L \rightarrow L' = L \pm \frac{d}{dt} R, \quad$ Bsp: $R = R(q_k, Q_k, t)$

zu L kann eine totale Zeitableitg. hinzugefügt werden

diese „Eichfreiheit" ist gegeben weil sie die Physik im Wirkprinzip nicht ändert:

$$S \overset{!}{=} \text{extremal} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \longrightarrow \delta S = 0 \quad \text{bei Variation um Bahnkurve}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(L \pm \frac{d}{dt} R\right)}_{L'} \overset{?}{\longrightarrow} \delta S' = \delta S = 0 \text{, wird gezeigt indem}$$



$$= S \pm \left(R(t_2) - R(t_1)\right)$$

$t_1, t_2 \;\hat{=}$ Anfangs- und Endzeit

jetzt $\delta S'$ berechnen $\quad \delta S' = \delta S \pm \left(\underbrace{\delta R(t_2) - \delta R(t_1)}_{=0}\right)$.

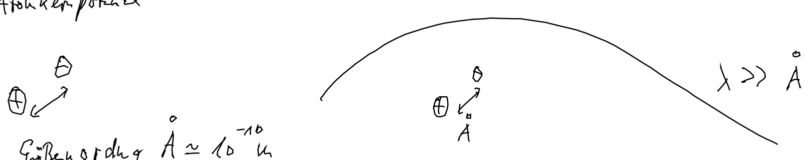
$$\Rightarrow \delta S = \delta S' = 0$$

Die Änderung der Lagrangefunktion um totale Zeitableitg. einer Funktion erhält das Wirkprinzip. („Eichfreiheit von L")

Beispiel f. Umeichung von L für Teilchen im elektromagnetischen Feld

Frage: $\phi, \vec{A} \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$

$$L = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} - V(\vec r)}_{\text{klassisches Elektron im Atomkernpotential}} \underbrace{- q\phi(\vec r, t) + q\,\dot{\vec r}(t)\,\vec A(\vec r, t)}_{\text{„optisches Feld mit } \lambda = 500\,nm\text{"}}$$



Größenordng. $\mathring{A} \simeq 10^{-10}\,m$

Feld soll sich schwach über Atomausdehnung ändern „Optik"

Ansatz:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(-q\,\underset{①}{\vec{r}(t)}\cdot \vec{A}(\underset{②}{\vec{r}(t)},\underset{③}{t})\right)$$

$$= L - q\,\underset{①}{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)} - q\,\vec{r}\cdot\underset{②}{\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}(\vec{r},t)\right)} - \underset{③}{q\,\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(\vec{r},t)}$$

Atom am Ort $\vec{r}\approx 0$

2. Ordnung in $\vec{r}$

$$= \underline{\underline{L}} - q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(0,t) - \underset{\text{2. Ordnung in } \vec{r}}{0} - q\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(0,t)$$

$$= \underbrace{\underline{\underline{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}} - q\phi(\vec{r},t) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}\approx 0,t) - q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(0,t)} - q\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(0,t)$$

$$= L_{\text{Elektron}} - q\phi(\vec{r},t) - q\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(0,t)$$

Def. d. elektrischen Felds: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \equiv \vec{E}(r\approx 0,t)$

$$= \vec{\nabla}\left(\vec{r}\cdot\vec{E}_L(r\approx 0,t)\right) - \underbrace{\partial_t\vec{A}(\vec{r}\approx 0,t)}_{\vec{E}_T} = \vec{E}_L(0,t) + \vec{E}_T(0,t)$$

$$L' = L_{\substack{\text{Elektron}\\ \text{im Atom}}} + q\vec{r}\cdot\vec{E}_L + q\vec{r}\cdot\vec{E}_T = L_{\substack{\text{Elek.}\\ \text{im Atom}}} + \underbrace{q\vec{r}}_{\text{Dipol}}\cdot\underbrace{\vec{E}(0,t)}_{\text{Feld}}$$

Umeichung ergibt eine Feld-Materie Kopplg. (Anbindg. Exp-Physik)

im Gegensatz zur Potential-Materie Kopplg. (hier besteht Eichfreiheiten).

ÜA: magnetischer Dipol

4.2.2. Konstruktionsvorschrift f. kanonische Trafo

Wie Konstruktion wenn L-Eichung verwendet wird?

$L' = L - \dot{R}$, wissen: $H' = \sum_k P_k \dot{Q}_k - L'$, $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

$\sum_k P_k \dot{Q}_k - H' = \sum_k p_k \dot{q}_k - H - \dot{R}$ mit Wahl: $R = R(q_k, Q_k, t)$

differentiell schreiben $dR = \sum_k \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt$, obere Gl. mal dt

$$\sum_k P_k \, dQ_k - H' dt = \sum_k p_k \, dq_k - H dt - \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k - \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

jetzt Differentiale verglichen:

„—" $\longrightarrow$ $-\left(H' - H - \frac{\partial R}{\partial t}\right) = 0$ bzw $\boxed{H' = H + \frac{\partial R}{\partial t}}$ „R ist die Erzeugende der kanonischen Trafo"

$*3$

„$\sim\sim$" $\longrightarrow$ $\boxed{P_k = -\frac{\partial R}{\partial Q_k}}$ $*_1$

„----" $\longrightarrow$ $\boxed{p_k = \frac{\partial R}{\partial q_k}}$ $*_2$

Konstruktion der KT:

1. $R(q_k, Q_k, t)$ wird vorgegeben, man kennt Berechnungsvorschriften und füllt diese aus
2. man findet zwei Formeln: $P_k \underset{*_1}{=} P_k(q_j, Q_j, t)$, $p_k \underset{*_2}{=} p_k(q_j, Q_j, t)$

   umstellen: $q_j = q_j(Q_k, P_k)$, $p_j = p_j(Q_k, P_k)$

3. $H' \underset{*_3}{=} H'(Q_k, P_k) \underset{*_3}{=} H\left(q_j(Q_k, P_k), p_j(Q_k, P_k)\right) + \partial_t R\left(q_j(Q_k, P_k), Q_j, t\right)$

neue Hamiltonfunktion ist damit (in P_k, Q_k) konstruiert und die entsprechenden Hamiltongleichungen sind im $P_k \, Q_k$-System forminvariant.