

Beispiele für Hamiltonfunktionen

a) freies Teilchen

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \text{aus } L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

b) Teilchen im Potential $V(\vec{r}, t)$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t), \quad \text{aus } L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}, t)$$

c) Teilchen im elektromagnetischen Feld: $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\underbrace{\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t)}_{\dots\dots\dots} - \underbrace{\partial_t \vec{A}(\vec{r}, t)}_{\dots\dots\dots} = \underbrace{\vec{E}_L(\vec{r}, t)}_{\dots\dots\dots} + \underbrace{\vec{E}_T(\vec{r}, t)}_{\dots\dots\dots}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

enthält als Spezialfall die Fälle a) und b)

$$\| H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi, \quad \text{aus } L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}}_{\text{stellt korrekturen sicher}}$$

Teilchen im elektromagn. Feld ϕ, \vec{A} wird dargestellt durch

$$H(\vec{p}, \vec{r}) \rightarrow H(\vec{p} - q\vec{A}, \vec{r}) + q\phi$$

Beweis: $H = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\dots} - L$ (Skalar)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})}{m}$$

$$\Rightarrow H = H(\vec{p}, \dot{\vec{r}}) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A}) \cdot \vec{p}}{\dots} - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right)^2 + q\phi - \frac{q}{m} (\vec{p} - q\vec{A}) \cdot \vec{A}$$

$$H = \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right)^2 + q\phi$$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \quad \checkmark$$

d) Illustration H-Redukt: Kegel:



$$1. L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \alpha$$

$$2. p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi} \quad , \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$3. H = H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi - \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \alpha$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2 \alpha \frac{p_\varphi^2}{(m r^2 \sin^2 \alpha)^2} \right) + mgr \cos \alpha$$

$$\downarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

$$4. \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3 \sin^2 \alpha} - mg \cos \alpha$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{m r^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad p_{\varphi} = \text{konstant, Erhaltungsgröße}$$

von φ hängt H nicht ab

Speziell: " φ ist eine zyklische Koordinate"

\rightarrow 4 gekoppelte Dgl. 1. Ordnung $\hat{=}$ 2 Dgl. 2. Ordnung. (Lagrange Beschreibung)

Lagrange 2. Art durch Differenzieren:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} = \frac{p_{\varphi}^2}{m r^3 \sin^2 \alpha} - g \cos \alpha \quad \checkmark \text{ bekannt}$$

4.2. Kanonische Transformationen (KT)

Ziel: Vereinfachung von H (außer Null) in einem neuen Koordinatensystem, oder: $\vec{A}, \vec{\Phi} \rightarrow \vec{E}, \vec{\beta}$.

$$\{q_k, p_k\} \xrightarrow{KT} \{Q_k, P_k\}, \quad H(q_k, p_k) \xrightarrow{KT} H'(Q_k, P_k)$$

Kanonische Transformation ist Transformation auf neue Koordinate Q_k, P_k

wobei die Hamiltongleichungen ihre Form behalten:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \quad \text{"Forminvarianz"}$$

2 Schritte zur konstruktiven Vorgehensweise:

1. Wie kann L verändert werden, ohne die Hamiltongl. zu ändern?

2. Konstruktionsvorschrift: $H \rightarrow H'$

4.2.1. Invarianz d. Wirkprinzips bei Änderung der Lagrangefunktion

$$\exists \text{ Fäkt in Wahl von } L: \quad L \rightarrow L' = L \pm \frac{d}{dt} R, \quad \text{Bsp: } R = R(q_k, \dot{q}_k, t)$$

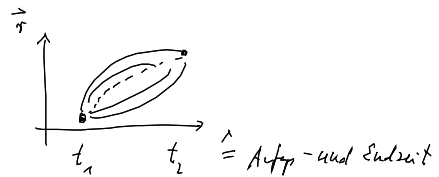
zu L kann eine totale Zeitableitung hinzugefügt werden

diese "Eichfreiheit" ist gegeben weil sie die Physik im Wirkprinzip nicht ändert:

$$S \stackrel{!}{=} \text{Wirkung} = \int_{t_1}^{t_2} dt L \rightarrow \delta S = 0 \text{ bei Variation um Bahnkurve}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L + \frac{d}{dt} R \right) \rightarrow \delta S' = \delta S = 0, \text{ wird gezeigt indem}$$

$$= S + (R(t_2) - R(t_1))$$



$$\text{gilt } \delta S' \text{ ebenfalls } \delta S' = \delta S + \underbrace{(\delta R(t_2) - \delta R(t_1))}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \delta S = \delta S' = 0$$

Die Änderung der Lagrange Funktion um totale Zeitableitung einer Funktion erhält das Wirkprinzip. ("Eichfreiheit von L ")

Beispiel f. Umrechnung von L für Teilchen im elektromagnetischen Feld

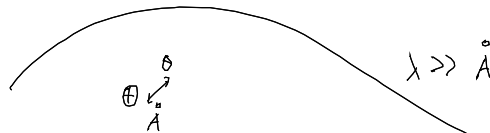
$$\text{Frage: } \phi, \vec{A} \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$$

$$L = \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}_{\text{klassisches Elektron im Atomenpotential}} + \underbrace{q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)}_{\text{magnetisches Feld mit } \lambda = 500 \text{ nm}}$$

klassisches Elektron
im Atomenpotential

magnetisches Feld mit $\lambda = 500 \text{ nm}$

Größenordnung $\dot{A} \approx 10^{-10} \text{ m/s}$



Feld soll sich schwach über Atom an delung ändern "Optik"

Ausgabe:

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left(-q \vec{r}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t) \right)$$

$$= L - q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q \vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla \vec{A}(\vec{r}, t) \right) - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Atom an Ort $\vec{r} \approx 0$

2. Ordnung in \vec{r}

$$= L - q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(0, t) - \mathcal{D} - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(0, t)$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) - q \phi(\vec{r}, t) + q \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\infty}, t)}_{L_{\text{elktron}}} - q \vec{r} \cdot \vec{A}(0, t) - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(0, t)$$

$$= L_{\text{elktron}} - q \phi(\vec{r}, t) - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(0, t)$$

Def. d. elektr. Felds: $\vec{E} = -\nabla \phi - \partial_t \vec{A} \equiv \vec{E}(\vec{r} \approx 0, t)$

$$= \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r} \approx 0, t))}_{\vec{E}_L} - \partial_t \vec{A}(\vec{r} \approx 0, t) = \vec{E}_L(0, t) + \vec{E}_T(0, t)$$

$$L' = L_{\text{elktron in Atom}} + q \vec{r} \cdot \vec{E}_L + q \vec{r} \cdot \vec{E}_T = L_{\text{elktron in Atom}} + \underbrace{q \vec{r} \cdot \vec{E}(0, t)}_{\text{Dipol} \cdot \text{Feld}}$$

Umwicklung ergibt ein Feld-Materie Koppng. (Ausbildg. Exp-Physik)

im Gegensatz zur Potential-Materie Koppng. (hier besteht sich Freiheit).

UA: magnetisch Dipol

4.2.2. Konstruktionsvorschrift f. kanonische Trafo

wie Konstruktoren wenn L-Eidung verwendet wird?

$$L' = L - \dot{R}, \quad \text{wobei: } H' = \sum_k p_k \dot{Q}_k - L', \quad H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

$$\sum_k p_k \dot{Q}_k - H' = \sum_k p_k \dot{q}_k - H - \dot{R} \quad \text{mit Wahl: } R = R(q_k, Q_k, t)$$

diff. schreiben $dR = \sum_k \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt$, oben gl. mal dt

$$\sum_k p_k dQ_k - H' dt = \sum_k p_k dq_k - H dt - \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k - \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

jetzt Diff. vergleichen:

" $\rightarrow -\left(H' - H - \frac{\partial R}{\partial t}\right) = 0$ bzw. $\boxed{H' = H + \frac{\partial R}{\partial t}}$ " R ist die Erzeugend
des kanonischen Trofs"

" $\rightarrow \boxed{p_k = -\frac{\partial R}{\partial Q_k}}$ *₁

" $\rightarrow \boxed{p_k = \frac{\partial R}{\partial q_k}}$ *₂

Konstruktion der KT:

1. $R(q_k, Q_k, t)$ wird vorgegeben, man kennt Berechnungsvorschriften und fñhrt diese aus

2. man findet zwei Formeln: $p_k = p_k(q_j, Q_j, t)$ *₁, $p_k = p_k(q_j, Q_j, t)$ *₂

$$\text{umstellen: } q_j = q_j(Q_k, p_k), \quad p_j = p_j(Q_k, p_k)$$

3. $H' = H'(Q_k, p_k) = H(q_j(Q_k, p_k), p_j(Q_k, p_k)) + \frac{\partial R}{\partial t}(q_j(Q_k, p_k), Q_j, t)$ *₃

neue Hamiltonfunktion ist damit konstruiert und die entsprechenden Hamiltongleichungen sind

in $p_k Q_k$ -System form invariant.