

2.1.5. Drehimpuls und Trägheitstensor

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad \text{in } \Sigma \text{ (raum fest)}, \quad \text{jetzt } \Sigma \rightarrow \Sigma' \text{ (Körper fest)}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}'_i) \quad , \quad \text{siehe letzte VL}$$

$$= \sum_i m_i \left[\underbrace{(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0)}_{\text{---}} + \underbrace{(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}'_i)}_{\text{---}} + \underbrace{(\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}_0)}_{\text{---}} + \underbrace{(\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i)}_{\text{---}} \right]$$

$$\text{wenn } \vec{r}_0 = \vec{R} \text{ (Schwerpunkt)}, \text{ aus } \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \text{ folgt "---" = 0}$$

$$\vec{L} = \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{---}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i}_{\text{---}}$$

Drehimpuls \vec{L}_{trans} der Translation analog. Massepunkt Drehimpuls \vec{L}_{rot} der Rotation, enthält Geometrie

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}'_i}_{\vec{A}} \times (\underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{B}} \times \underbrace{\vec{r}'_i}_{\vec{C}}) \quad | \text{ im Körperfest System}$$

$$\text{mit } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\Downarrow \vec{L}_{\text{rot}} = \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i{}^2 - \vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i \cdot \vec{\omega} \right)$$

Versuch, Trägheitstensor einzuführen:

$$= \sum_i m_i \left(\sum_k \vec{e}'_k \omega_k \sum_m x_m^2(i) - \underbrace{\sum_k \vec{e}'_k x'_k(i) \sum_e \omega_e x'_e(i)} \right)$$

Darstellung von \vec{r}'_i über
Komponente $x'_k(i)$
($k: x, y, z \mid 1, 2, 3$)

$$= \sum_k \vec{e}'_k \sum_i m_i \left(\sum_m x_m^2(i) \omega_k - x'_k(i) \sum_e x'_e(i) \omega_e \right)$$

$$= \sum_{ke} \vec{e}'_k \sum_i m_i \left(\sum_m x_m^2(i) \delta_{ek} \omega_e - x'_k(i) x'_e(i) \omega_e \right)$$

$$= \sum_k \vec{e}'_k \sum_e \theta_{ke} \omega_e = \sum_k \vec{e}'_k \underbrace{L'_{k \text{ rot}}}_{k\text{-te Komponente}}$$

$$\Downarrow L'_{k \text{ rot}} = \sum_e \theta_{ke} \omega_e$$

Bemerkungen:

a) $\vec{L}'_{\text{rot}} \Rightarrow \vec{L}$, wenn eindeutig u. Translation nicht wichtig

b) $L'_k = \sum_e \theta_{ke} \omega_e \stackrel{\hat{=}}{=} \text{Matrixoperation } \vec{L}' = \hat{\Theta} \vec{\omega}$

Gesamt Drehimpuls der Rotation d. SK kann als Produkt
der Trägheitsmatrix und der Winkelgeschwindigkeit berechnet werden

c) Darstellung kinetischer Energie: $T = \frac{1}{2} \vec{L}' \cdot \vec{\omega}' = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$

↑
genau Diskussion bei
Anwendung

als nächstes: Rotation um feste Achsen $\vec{\omega} = \text{richtungs konstant}$

später: $\vec{\omega}(t)$ beliebig

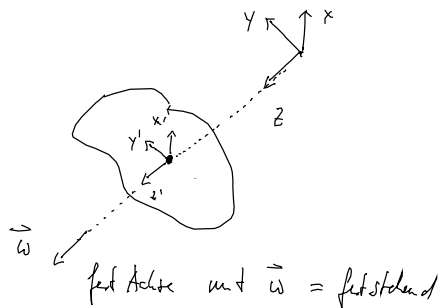
Hauptachsen befo: $\Theta_{ke} \rightarrow \Theta_{ke} \delta_{ke}$

2.1.6. Rotation um feste Achsen durch den Schwerpunkt

a) Kinetische Energie

\vec{e}_z aus Σ und \vec{e}'_z aus Σ'

u. Kollinearität \vec{e}_z zur Achse $\vec{\omega}$:



$$T = \frac{1}{2} \sum_{ke} \Theta_{ke} \omega'_k \omega'_e$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z) \quad \text{in } \Sigma$$

$$= (0, 0, \omega'_z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ke} \Theta_{ke} \omega'_z \delta_{kz} \omega'_z \delta_{ez} = \frac{1}{2} \Theta_{zz} \omega'^2_z = \frac{1}{2} \Theta_{zz} \omega^2_z$$

Θ_{zz} ist ausreichend zur Bestimmung der kinetischen Energie

b) Drehimpuls

$$L'_k = \sum_e \Theta_{ke} \omega'_e = \sum_e \Theta_{ke} \delta_{ez} \omega'_z = \Theta_{kz} \omega'_z = \Theta_{kz} \omega_z = L_k$$

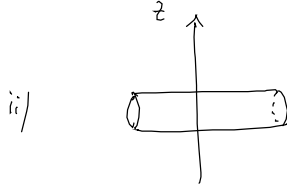


k-te Komponente d. Drehimpuls, in Prinzip alle Θ_{ke} benötigt

c) Beispiel für Drehachsen:



$$\Theta_{zz}^{(i)} \neq \Theta_{zz}^{(ii)} \quad T^{(i)} \neq T^{(ii)} \quad \int \text{dasselbe } \vec{\omega}$$



Fall i)
$$\Theta_{zz}^{(i)} = \int d\tau \underbrace{\rho_M(\vec{r})}_{\text{Massendichte}} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\substack{\text{Zylinderkoordinaten} \\ \text{Zylinderslänge } L, \text{ Radius } R}} = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \underbrace{\frac{M}{\pi R^2 L}}_{\rho_M = \text{konstant}} \rho^2$$

$$\Theta_{zz}^{(i)} = \frac{M}{2} R^2 \quad \text{unabhängig von } L!$$

Fall ii)
$$\Theta_{zz}^{(ii)} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Me^2}{12} \quad \text{abhängig von } L!$$

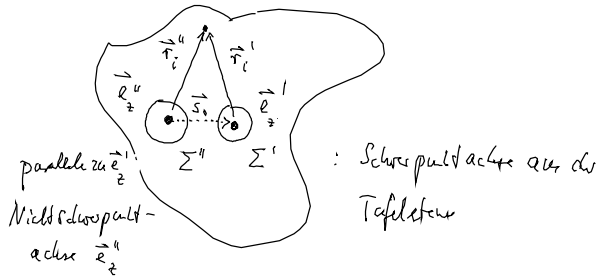
Wicht: Achtung! Koordinatenursprung v. Σ' immer im Schwerpunkt:
ergibt sich Formeln nach Achsen die nicht durch den Schwerpunkt laufen

d) Satz von Steiner

Für Trägheitsmomente Θ_{zz} zweier paralleler Achsen von denen eine durch den

Schwerpunkt gilt gilt:

$$\underbrace{\theta''}_{\substack{\text{Trägheitsmoment} \\ \text{einer Achse } \vec{e}_z'' \\ // \text{ zu } \vec{e}_z'}} = \underbrace{\theta'_S}_{\substack{\text{Trägheitsmoment} \\ \text{einer Achse } \vec{e}_z' \\ \text{durch Schwerpunkt} \\ (S)}} + \underbrace{M s_0^2}_{\substack{\text{Gesamt-} \\ \text{Masse} \\ \text{mal} \\ \downarrow \text{Abstand}}}$$



Beweis:

$$\begin{aligned} \theta'' &= \sum_i m_i \left(x''^2(i) + y''^2(i) \right) \quad \text{mit} \quad \vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{s}_0 \\ &= \sum_i m_i \left((x'(i) + x_0)^2 + (y'(i) + y_0)^2 \right) \\ &= \sum_i m_i \left((x'^2(i) + y'^2(i)) + (x_0^2 + y_0^2) \right) \\ &= \underbrace{\theta'_S}_{\theta'_S} + \underbrace{M s_0^2}_{M s_0^2} \quad s_0^2 = x_0^2 + y_0^2 \end{aligned}$$

gilt Option, Trägheitsmomente ineinander umzurechnen.

2.1.7 Hauptachse transformations

i.e. gilt $L_K = \sum_k \theta_{kk} \omega_k$, messen in Σ' , " " " " weglassen

alle Diskussion in Σ'

suchen Σ' System, (hat ja Drehfreiheit) im Schwerpunkt, in dem

$$L_k = \Theta_k \omega_k = \sum_c \Theta_{kc} \delta_{kc} \omega_c \quad : \quad \Theta_{kc} \text{ soll nur Diagonalelemente enthalten,}$$

speziell Drehachse f. die $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \quad \downarrow \quad \text{Ansatz: } \vec{L} = \hat{\Theta} \vec{\omega} = \Theta \vec{\omega}$

Eigenwertproblem f. Matrix $\hat{\Theta}$,
wenn $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, Θ -Zahl

gilt da $\hat{\Theta}$ reell, symmetrisch ist, \exists Eigenwerte, \exists orthogonale Achse:

$\vec{\omega}$ mit $\vec{\omega} \parallel \vec{L} \quad : \quad \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_\alpha$ wenn α

$$\left(\hat{\Theta} - \Theta_\alpha \hat{1} \right) \vec{\omega}_\alpha^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \vec{\omega}_\alpha^\alpha = (\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha)$$

$\hat{1}$: Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \Theta_{11} - \Theta_\alpha & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta_\alpha & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^\alpha \\ \omega_2^\alpha \\ \omega_3^\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$\hat{=}$ lineares Gleichungssystem für Θ_α und ω_i^α .

Sprechweise: Θ_α : „Hauptträgheitsmoment“

$\vec{\omega}_\alpha^\alpha$: „Hauptachsen“

$\Sigma^I \rightarrow \Sigma_{HA}^I$ Hauptachsentransformation

Bemerkungen:

Hauptachse darstellung:

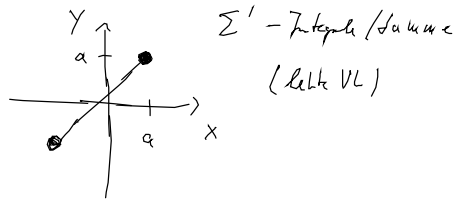
$$a) L_k = \sum_r \theta_{ke} \omega_r \Big|_{\Sigma' \text{ beliebig}} = \theta_k \omega_k \Big|_{\Sigma' \text{ HA}} \rightarrow L_\alpha = \theta_\alpha \omega_\alpha$$

$$\vec{L} = \sum_\alpha \theta_\alpha \omega_\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{L}$$

↖
Achse in Hauptachsen System

$$b) T = \frac{1}{2} \sum_\alpha \theta_\alpha \omega_\alpha^2$$

c) Beispiel f. Hauptproblem.



i) Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 - \theta_\alpha & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 - \theta_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 - \theta_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^\alpha \\ \omega_2^\alpha \\ \omega_3^\alpha \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

f. Nullwertig. bzw. muß Determinante verschwinden.

$$(4ma^2 - \theta_\alpha) \left[(2ma^2 - \theta_\alpha)^2 - 4m^2 a^4 \right] = 0$$

$$\downarrow \theta_1 = 4ma^2, \quad -4ma^2 \theta_\alpha + \theta_\alpha^2 = 0$$

$$\theta_2 = 4ma^2, \quad \theta_3 = 0$$

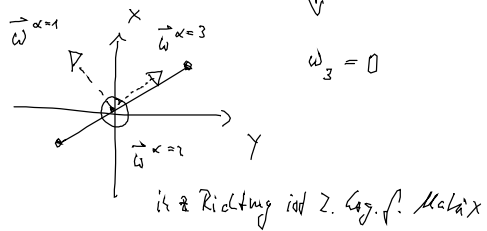
$$\Theta_{ke}^{HA} = \begin{pmatrix} 4ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist der Trägheitstensor in Hauptachsensystem}$$

ii) Bestimmung d. Eigenvektoren:

$$(\omega_1^x, \omega_2^x, \omega_3^x) \neq \Theta_{ke}$$

1. und 2. Achse - Einträge von $\Theta_{ke=1,2}$ in das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^x \\ \omega_2^x \\ \omega_3^x \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \kappa=1 \quad \omega_1^1 &= -\omega_2^1 \\ \omega_1^1 &= -\omega_2^1 \\ \omega_3^1 &\hat{=} \text{Kein Term} \end{aligned}$$



3. Achse

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \\ \omega_3^3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{führt auf} \quad \omega_1^3 = \omega_2^3, \quad \omega_3^3 = 0$$

insgesamt:

$$\vec{\omega}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \quad \vec{\omega}^2 = (0, 0, 1), \quad \vec{\omega}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$$

Sind die directionslosen Hauptträgheitsachsen,
entsprechend normierten Eigenvektoren