2.1.5. Drehimpuls und Trägheitstensor

$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ in Σ (raumfest), jetzt $\Sigma \to \Sigma'$ (Körperfest)

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}' \right) \times \left(\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_i{}' \right)$$, siehe letzte VL

$$= \sum_i m_i \left[\underline{\left(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 \right)} + \left(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_i{}' \right) + \left(\vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_0 \right) + \left(\vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}' \right) \right]$$

wenn $\vec{r}_0 \equiv \vec{R}$ (Schwerpunkt), aus $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$ folgt "----" $= 0$

$$\vec{L} = \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Drehimpuls } \vec{L}_{trans} \text{ der Translation analog. Massepunkt}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'}_{\text{Drehimpuls } \vec{L}_{rot} \text{ der Rotation, enthält Geometrie}}$$

$$\vec{L}_{rot} = \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_i{}'}_{\vec{A}} \times \left(\underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{B}} \times \underbrace{\vec{r}_i{}'}_{\vec{C}} \right) \Big|_{\text{im körperfest System}}$$

mit $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \vec{B} \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right)$

$$\Rightarrow \vec{L}_{rot} = \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \, \vec{r}_i{}'^2 - \vec{r}_i{}' \, \vec{r}_i{}' \cdot \vec{\omega} \right)$$

Versuch, Trägheitstensor einzuführen:

$$= \sum_i m_i \left(\sum_k \vec{e}_k^{\,\prime} \omega_k \sum_m x_m'^2(i) - \underbrace{\sum_k \vec{e}_k^{\,\prime} x_k'(i)}_{} \sum_l \omega_l x_l'(i) \right)$$

Darstellung von $\vec{r}_i^{\,\prime}$ über
Komponente $x_k'(i)$
(k: x, y, z | $1, 2, 3$)

$$= \sum_k \vec{e}_k^{\,\prime} \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \omega_k - x_k'(i) \sum_l x_l'(i)\, \omega_l \right)$$

$$= \sum_{kl} \vec{e}_k^{\,\prime} \underbrace{\sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \delta_{lk}\, \omega_l - x_k'(i)\, x_l'(i)\, \omega_l \right)}_{}$$

$$= \sum_k \vec{e}_k^{\,\prime} \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l = \sum_k \vec{e}_k^{\,\prime} \underbrace{L'_{k\,\mathrm{rot}}}_{k\text{-te Komponente}}$$

$$\Rightarrow \quad L'_{k\,\mathrm{rot}} = \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l$$

Bemerkungen:

a) $\vec{L}_{\mathrm{rot}} \Rightarrow \vec{L}$, wenn eindeutig u. Translation nicht wichtig

b) $L'_k = \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l \;\hat{=}\;$ Matrixoperation $\vec{L}' = \hat{\Theta}\, \vec{\omega}$

Gesamtdrehimpuls der Rotation d. SK kann als Produkt der Trägheitsmatrix mit der Winkelgeschwindigkeit berechnet werden

c) Darstellung kinetischen Energie: $T = \frac{1}{2} \vec{L}' \cdot \vec{\omega}' = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$

genaue Diskussion bei Anwendung

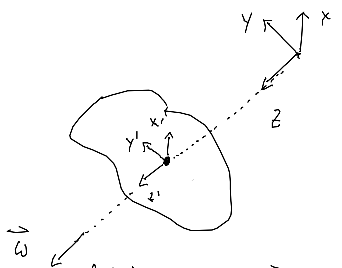
als nächstes: Rotation um feste Achsen $\vec{\omega}$ = richtungskonstant

später: $\vec{\omega}(t)$ beliebig

Hauptachsentrafo: $\theta_{ke} \rightarrow \theta_{ke}\,\delta_{ke}$

2.1.6. Rotation um feste Achsen durch den Schwerpunkt

a) Kinetische Energie



$\vec{e}_z$ an Σ und $\vec{e}_z\,'$ an Σ'

u. Kolinearität fest zur Achse $\vec{\omega}$:

feste Achse mit $\vec{\omega}$ = feststehend

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ in Σ

$= (0, 0, \omega_z')$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ke} \theta_{ke}\, \omega_k' \omega_e'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ke} \theta_{ke}\, \omega_z'\,\delta_{kz}\, \omega_z'\,\delta_{ez} = \frac{1}{2}\theta_{zz}\,\omega_z'^2 = \frac{1}{2}\theta_{zz}\,\omega_z^2$$

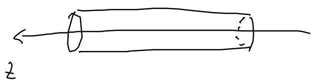
θ_{zz} ist ausreichend zu Bestimmung der kinetische Energie

b) Drehimpuls

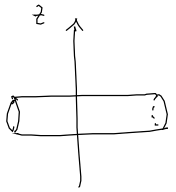
$$L_k' = \sum_e \theta_{ke}\,\omega_e' = \sum_e \theta_{ke}\,\delta_{ez}\,\omega_z' = \theta_{kz}\,\omega_z' = \theta_{kz}\,\omega_z = L_k$$

k-te Komponente d. Drehimpuls, im Prinzip alle θ_{ke} benötigt

c) Beispiel für Drehachsen:

i) 

$\Theta^{(i)}_{zz} \neq \Theta^{(ii)}_{zz}$ $\quad T^{(i)} \neq T^{(ii)}$ f. dasselbe $\vec{\omega}$

ii) 

Fall i) $\Theta^{(i)}_{zz} = \int d^3r \underbrace{\rho_M(\vec{r})}_{\text{Massedichte}} \overbrace{(x^2+y^2)}^{\rho^2} = \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} d\rho\, \rho \underbrace{\frac{M}{\pi R^2 \ell}}_{\rho_M = \text{konstant}} \rho^2$

Zylinderkoordinate

Zylinder Länge ℓ, Radius R

$$\Theta^{(i)}_{zz} = \frac{M}{2} R^2$$ unabhängig von ℓ!

Fall ii) $$\Theta^{(ii)}_{zz} = \frac{MR^2}{4} + \frac{M\ell^2}{12}$$ abhängig von ℓ!

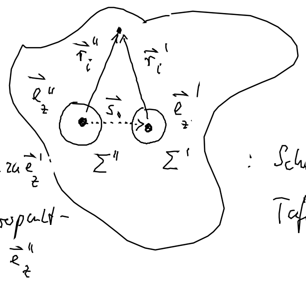
bisher: Achtg! Koordinatenursprung v. Σ' immer im Schwerpunkt:
ergibt sich Frage nach Achse die nicht durch den Schwerpunkt laufen

d) Satz von Steiner

Für Trägheitsmomente Θ_{zz} zweier paralleler Achsen von denen eine durch den

Schwerpunkt gelt gilt:

$$\underbrace{\Theta''}_{\substack{\text{Trägheitsmoment}\\ \text{eine Achse } \vec{e}_z''\\ \parallel \text{zu } \vec{e}_z'}} = \underbrace{\Theta_S'}_{\substack{\text{Trägheitsmoment}\\ \text{eine Achse } \vec{e}_z'\\ \text{durch Schwerpunkt}\\ (S)}} + \underbrace{M s_0^2}_{\substack{\text{Gesamt-}\\ \text{masse}\\ \text{mal}\\ \perp \text{ Abstand}}}$$



parallel zu $\vec{e}_z'$

Nichtschwerpunktachse $\vec{e}_z''$

: Schwerpunktachse aus der Tafelebene

<u>Beweis:</u> $\Theta'' = \sum_i m_i \left(x''^2(i) + y''^2(i)\right)$ mit $\vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{s}_0$

$\vec{s}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$= \sum_i m_i \left(\left(x'(i) + x_0\right)^2 + \left(y'(i) + y_0\right)^2 \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) + \left(x_0^2 + y_0^2\right) \right)$$

$$= \Theta_S' + M s_0^2 \qquad s_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

gilt Option, Trägheitsmomente ineinander umzurechnen.

2.1.7 Hauptachsentransformation

i.e. gilt $L_k = \sum_l \Theta_{kl} \omega_l$, messen in Σ', „ ' " weglassen

alle Diskussion in Σ'

suche Σ' System, (hat ja Drehfreiheit) im Schwerpunkt, in dem

$$\underbrace{L_k = \Theta_k \omega_k}_{} = \sum_l \Theta_{kl} \delta_{kl} \omega_l \quad : \Theta_{kl} \text{ soll nur Diagonalelemente enthalten,}$$

spezielle Drehachse f. die $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ $\Downarrow$ Ansatz: $\vec{L} = \underbrace{\hat{\Theta}\vec{\omega} = \Theta\vec{\omega}}_{}$

Eigenwertproblem f. Matrix $\hat{\Theta}$,
wenn $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, Θ – Zahl

gibt da $\hat{\Theta}$ reell, symmetrisch ist, 3 Eigenwerte, 3 orthogonale Achse:

$\vec{\omega}$ mit $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$: $\vec{\omega} \to \vec{\omega}_{\parallel}$ nennen

$$\left(\hat{\Theta} - \Theta_\alpha \hat{1} \right) \vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha} = 0 \,, \quad \alpha = 1,2,3 \,, \quad \vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha} = (\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha)$$

$\hat{1}$: Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \Theta_{11} - \Theta_\alpha & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta_\alpha & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^\alpha \\ \omega_2^\alpha \\ \omega_3^\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$\hat{=}$ lineares Gleichungssystem für Θ_α und ω_i^α.

Sprechweise: Θ_α : „Hauptträgheitsmoment"

$\vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha}$: „Hauptachsen"

$\Sigma' \to \Sigma'_{HA}$ Hauptachsentransformation

<u>Bemerkungen:</u>

Hauptachsendarstellung:

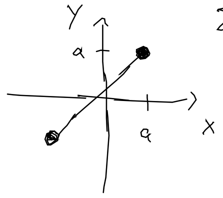
a) $L_k = \sum_l \Theta_{kl} \omega_l \Big|_{\Sigma' \text{ beliebig}} = \Theta_k \omega_k \Big|_{\Sigma'_{HA}} \rightarrow L_\alpha = \Theta_\alpha \omega_\alpha$

$\vec{L} = \sum_\alpha \Theta_\alpha \omega_\alpha \underline{\underline{\vec{e}_\alpha}}$

Achse im Hauptachsensystem

b) $T = \frac{1}{2} \sum_\alpha \Theta_\alpha \omega_\alpha^2$

c) Beispiel f. Hantelproblem.



Σ' – Integrale/Summe (letzte VL)

i) Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 - \Theta_\alpha & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 - \Theta_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 - \Theta_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^\alpha \\ \omega_2^\alpha \\ \omega_3^\alpha \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

f. nichttriviale Lsg. muß Determinante verschwinden.

$$\underbrace{(4ma^2 - \Theta_\alpha)}\underbrace{[(2ma^2 - \Theta_\alpha)^2 - 4m^2a^4]} = 0$$

$\rightarrow \Theta_1 = 4ma^2 \; , \qquad \underbrace{-4ma^2 \Theta_\alpha + \Theta_\alpha^2 = 0}$

$\Theta_2 = 4ma^2 \; , \; \Theta_3 = 0$

$$\Theta_{kl}^{HA} = \begin{pmatrix} 4ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ist der Trägheitstensor im Hauptachsensystem

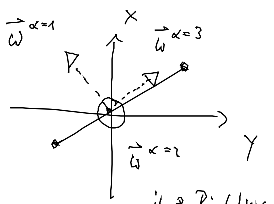
ii) Bestimmung d. Eigenvektoren:

$$(\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha, \omega_3^\alpha) \quad \forall\ \Theta_\alpha$$

1. und 2. Achse: einsetzen von $\Theta_{\alpha=1,2}$ in das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^\alpha \\ \omega_2^\alpha \\ \omega_3^\alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\alpha=1} \quad \begin{aligned} \omega_1^1 &= -\omega_2^1 \\ \omega_1^1 &= -\omega_2^1 \\ \omega_3^1 &\hat{=} \text{ keine Information} \end{aligned}$$

$\omega_3 = 0$



in z Richtung ist 2. Lsg. f. Matrix

3. Achse

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \\ \omega_3^3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{führt auf} \quad \omega_1^3 = \omega_2^3 \,,\ \omega_3^3 = 0$$

insgesamt:

$$\vec{\omega}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \,,\quad \vec{\omega}^2 = (0,0,1) \,,\quad \vec{\omega}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

Sind die dimensionslosen Hauptträgheitsachsen,
entsprechen normierten Einheitsvektoren