6.2. Grenzfall Newtonmechanik

Newtonmechanik $v^i \ll c$ $(i = 1,2,3)$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\alpha(\tau) = \left(\gamma(t) c, \gamma(t) v^1(t), \gamma(t) v^2(t), \gamma(t) v^3(t) \right) \quad \text{(vorletzte VL)}$$

$t = t(\tau)$

f. $v^i \ll c$ $\Rightarrow$ $u^\alpha(\tau) = (c, 0, 0, 0)$

betrachten Gleichung f. Teilchenbahn

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \underbrace{- \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

Kraft auf Teilch x^α : soll jetzt in Störungstheorie berechnet werden indem Newtongrenzfall eingesetzt wird

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \approx - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta_{\mu 0} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta_{\nu 0} = - \Gamma^\alpha_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

$$\text{mit } \Gamma^\alpha_{00} = \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} g_{0\nu} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

über ν wird noch summiert, nur $\mu, \nu = 0$ gesetzt in vollen $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$

im Newtongrenzfall $\exists$ statisches Gravitationsfeld, d.h. Zeitableitung $\to 0$, $\frac{\partial}{\partial x^0} \to 0$

$(x^0 = ct)$

$$\Gamma^\alpha_{00} = - \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

g_{00} : wird durch Gravitation modifiziert

Christoffelsymbol im Newtongrenzfall

$$g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

inverse Matrix zu $g_{\nu\beta}$, auch hier für Näherung machen

$$\underbrace{\underbrace{\eta^{\alpha\nu}}_{\text{inverse Matrix zum Minkowskitensor } \eta_{\nu\beta}}\eta_{\nu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}}_{\text{ohne Gravitation}} \;\hat{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}}_{\eta^{\alpha\nu} \text{ sieht man}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}}_{\eta_{\nu\beta} \text{ gegeben}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

f. $i = 1,2,3$: $\quad \eta^{ij} = -\delta_{ij} = \eta_{ij}$

Störungstheorie: $g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} + \underbrace{\varepsilon^{\alpha\nu}}_{\text{Korrektur d. Gravitation, Newtongrenzfall}} \longrightarrow \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{\eta^{\alpha\nu}}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\varepsilon_{00}}_{\text{1. Ordnung in Störung}}$

Bahnkurve: $\alpha = i = 1,2,3$

$$\eta^{ij} = -\delta^{ij} \longrightarrow \Gamma^{i}_{00} = \frac{\delta^{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\varepsilon_{00}$$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^{i}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{2}\delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\varepsilon_{00}\cdot\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial x^i}\underbrace{\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2}_{\text{unbekannt, aber } \alpha=0 \text{ liefert mehr Info}}$$

Bahnkurven: $\alpha = 0$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\Gamma^{0}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \frac{\eta^{0\nu}}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\varepsilon_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\delta^{0\nu}\underline{\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}}\varepsilon_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \left|\begin{array}{l} 0 = \nu \\ \text{d.h.: Zeitableitg.} \end{array}\right| = 0$$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \longrightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = \text{konst} \;\Rightarrow\; \frac{d\,ct}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma \xrightarrow[\text{Newton}]{\gamma\to 1} c$$

wieder $i = 1,2,3$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\varepsilon_{00}\, c^2 \quad , \text{ gilt } \quad \frac{d^2x^i(\tau)}{d^2\tau} \approx \frac{d^2x^i(t)}{d^2t} \quad \text{Newtongrenzfall}$$

genähert:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial x^i} \qquad (\text{Einstein} \rightarrow \text{Newton})$$

$$\cancel{m}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(\vec{r})}_{\text{Gradient d. Gravitationspotentials}}\cancel{m} \qquad \left(\text{Newton } \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{m}\right)$$

Vergleich: $\varepsilon_{00} = \frac{2}{c^2}\varphi(\vec{r})$, $g_{00} = 1 + \varepsilon_{00} = 1 + \frac{2\varphi(\vec{r})}{c^2}$

$\varphi(\vec{r})$ nach Newton:

$$\cancel{m}\ddot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_r \sum_n \frac{G\cancel{m}\, m_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|} = -\vec{\nabla}\frac{\varphi}{m} \quad , \quad \varphi(\vec{r}) = -\sum_n \frac{m_n G}{|\vec{r}-\vec{r}_n|}$$

Kraft auf m durch alle m_n. Potential das m verspürt durch alle anderen m_n.

dh: sind in der Lage Korrekturen zu diskutieren

a) $\frac{2\varphi}{c^2} \approx \left|\, \varphi = -\frac{G m_n}{r} \right|$ (1 Masse) $= \begin{cases} \text{Erde: } 10^{-9} \\ \text{Neutronenstern: } 10^{-1} \\ \text{Schwarzes Loch: } > 1 \rightarrow \text{Theorie bricht zusammen (nächste VL)} \end{cases}$

(typische Werte)

b) jetzt kann $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ als Invariante diskutieren

7. Einfache Folgerungen aus Newtongrenzfall

7.1. Ruhende Uhren / physikalische Vorgänge im Gravitationsfeld

$$\underbrace{c^2 d\tau^2}_{\text{Eigenzeit der Uhr}} = ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \Big|_{\substack{\alpha,\beta = 1,2,3 \\ \text{ist } dx^\alpha = dx^\beta = 0 \\ \text{(Ortskoordinate)}}} = g_{00}\, dx^0 dx^0$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^0 = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, c\,dt = \sqrt{g_{00}}\, dt$$

2 Fälle mit (m) oder ohne (o) Gravitationsfeld:

ohne: $\quad g_{00}^{1/2} = 1 \quad (\varepsilon_{00} = 0) \quad \rightarrow \quad \frac{d\tau}{dt_0} = 1 \quad \rightarrow \quad d\tau = dt_0$

mit: $\quad g_{00}^{1/2} = (1 + 2\varphi/c^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d\tau}{dt_m} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \rightarrow d\tau = dt_m \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$

$$\curvearrowright \quad \frac{dt_0}{dt_m} = 1 + \frac{\varphi}{c^2} < 1 \quad , \text{ weil } \varphi < 0$$

$$\boxed{dt_0 < dt_m}$$

physikalische Prozesse im Gravitationsfeld verlaufen langsamer (Zeitdehnung im Gravitationsfeld)

7.2. Rotverschiebung v. Licht

besondere Uhr: Entstehg. v. Licht aus atomaren Systemen

ohne Gravitation $\quad \omega_0 \sim \frac{1}{dt_0} \qquad$ mit Gravitation $\quad \omega_m \sim \frac{1}{dt_m}$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} < 1 \qquad \omega_m < \omega_0$$

Rotverschiebung bei Emission im Gravitationsfeld

im Vgl. zu Exp. auf Erde, ist Korrektur etwa $10^{-6}\, \omega_0$

7.3. Lichtgeschwindigkeit in Gravitationsfeldern

ohne Gravitation

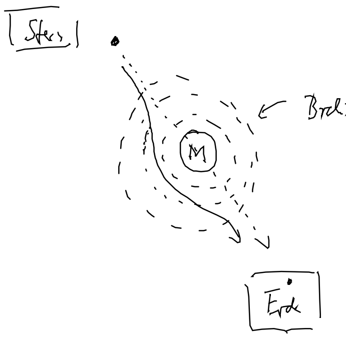
$$d^2s\big|_{SRT} = c^2dt^2 - d\vec r^{\,2}\big|_{Licht} = 0 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \rightarrow c = \frac{dr}{dt} \equiv \text{Vakuum ohne Gravitation}$$

mit Gravitation:

$$d^2s\big|_{ART} = \left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2dt^2 - d\vec r^{\,2}\big|_{Licht} = 0 = \underbrace{g_{\alpha\beta}}_{g_{00}\neq\eta_{00}}\, dx^\alpha x^\beta \rightarrow c\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right) = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{c_m}{c_0} = \left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right) < 1$$

Licht ist langsamer in Anwesenheit von Gravitation und kann durch $\varphi(\vec r)$ als Funktion d. Orts manipuliert werden → Brechzahleffekt



← Brechzahlverteilung über $\varphi(\vec r)$

1919 Eddington Expedition

Lichtweg Stern – Erde durch $\varphi(\vec r)$ modifiziert

Vorhersage: Einstein wird Medienstar

8. Gravitationsfeldgleichungen

bisher metrischer Tensor nur im Newtongrenzfall, nur g_{00} modifiziert ($\varphi \sim g_{00}$)

Einstein: Gravitationsfeldgleichungen für $g_{\gamma\mu}$ (alle Komponenten) die von Materieverteilung abhängen

8.1. Newtonsche Gravitationsfeldgleichungen

Newton: $\varphi(\vec r) = -\sum_n \frac{G m_n}{|\vec r - \vec r_n|}$ unabhängig v. Probeteilchen u. definiert

(1) $\boxed{\Delta\varphi(\vec r) = 4\pi G \rho_M(\vec r)}$ ← ρ_M ist Massenverteilung, f. Punktmasse $\rho_M(\vec r) = \sum_n m_n \delta(\vec r - \vec r_n)$

Laplaceoperator $\vec\nabla\cdot\vec\nabla \equiv$ div grad

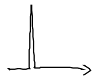
$$\boxed{\Delta g_{00} = \frac{G\, 8\pi\, \rho_M(\vec{r})}{c^2}} \quad \text{an} \quad g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

(1) - bestimmt das Gravitationspotential $\varphi(\vec{r})$ das mittels $\vec{f}_G = m \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)$

auf Probemasse m wirkt. / ρ_M ist beliebig, zunächst durch Punktmasse gegeben.

- muß eigentlich noch bewiesen werden, über $f(r) = \frac{1}{r}$, muß zeigen daß $\Delta f(r)$ eine δ-Funktion ist

a) $\Delta f = 0$, wenn $\vec{r} \neq 0$



b) $\int d^3r\, \Delta f = -4\pi$

= feste Normierungswert

wäre f. eine Punktmasse durchzuführen, gilt dann f. $\sum_i$ Punktmasse
$(\vec{r}_i = 0)$