

## 6.2. Grenzfall Newtonmechanik

Newtonmechanik  $v^i \ll c$  ( $i=1,2,3$ )

$$u^\kappa(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\kappa(\tau) = \left( \underset{\substack{\uparrow \\ t=t(\tau)}}{c}, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3 \right) \quad (\text{vollste VL})$$

$$\{v^i \ll c\} \Rightarrow u^\kappa(\tau) = (c, 0, 0, 0)$$

behalten Gleichung f. Teilbahn

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = - \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}_{\text{Kraft auf Teilch } x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Kraft auf Teilch  $x^\alpha$  : soll jetzt in Infinitesimale Theorie berechnet werden  
indem Newton Grenzfall eingesetzt wird

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \approx - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta_{\mu 0} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta_{\nu 0} = - \Gamma_{00}^\alpha \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

$$\text{mit } \Gamma_{00}^\alpha = \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} g_{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x^0} g_{0\nu} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

über  $\nu$  wird noch summiert, wo  $\mu, \nu = 0$  gesetzt ist, wenn  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$

in Newton Grenzfall  $\exists$  statisches Gravitationsfeld, d.h. Zeitabhängigkeit  $\rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^0} \rightarrow 0$

$$(x^0 = ct)$$

$$\Gamma_{00}^\alpha = - \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad g_{00} : \text{ wird durch Gravitation modifiziert}$$

Christoffel-Symbole im Newton Grenzfall

$$g^{\nu\alpha} g_{\nu\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

inverse Matrix zu  $g_{\nu\beta}$ , auch hier für Matrix machen

$$g^{\alpha\beta} g_{\nu\beta} = \delta^{\alpha}_{\nu}$$

inverse Matrix  
 zum Minkowski-Metrik  $g_{\nu\beta}$

ohne Funktion

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$g^{\alpha\nu}$  sieht man  
 $g_{\nu\beta}$  gegeben

f.  $i=1,2,3$ :  $g^{ij} = -\delta_{ij} = g_{ij}$

Störterm:  $g^{\alpha\nu} = g^{\alpha\nu} + \underbrace{\Sigma^{\alpha\nu}}_{\text{Korrektur d. Funktion,}} \rightarrow \Gamma_{00}^{\alpha} = -\underbrace{g^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}}_{\text{1. Ordng. in Störung}} \epsilon_{00}$

Metrik prinzipiell

Bahnkurve:  $\alpha=i=1,2,3$

$g^{ij} = -\delta^{ij} \rightarrow \Gamma_{00}^i = \frac{\delta^{ij}}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \epsilon_{00}$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^i \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \epsilon_{00} \cdot \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{00}}{\partial x^i} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

umkehrt, aber  
 $\alpha=0$  liefert kein  
 Infos

Bahnkurve:  $\alpha=0$

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^0 \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = g^{0\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \epsilon_{00} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \delta^{0\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \epsilon_{00} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = \left. \begin{matrix} 0=0 \\ \text{d.h.: Zeitabkling.} \end{matrix} \right| = 0$$

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = \text{konst} \rightarrow \frac{dct}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c \gamma \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} c$$

Newton

wieder  $i = 1, 2, 3$

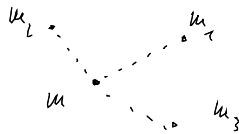
$$\frac{d^2 x^i}{d\tilde{t}^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_{00} c^2 \quad , \quad \text{gilt} \quad \frac{d^2 x^i(\tilde{t})}{d^2 \tilde{t}} \approx \frac{d^2 x^i(t)}{d^2 t} \quad \text{Newtongesetz}$$

gelesen:  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial \epsilon_{00}}{\partial x^i} \quad (\text{Einstein} \rightarrow \text{Newton})$

$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi(\vec{r})}_m \quad (\text{Newton } \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{m})$   
 Gradient d. gravitationspotentials

Vergleich:  $\epsilon_{00} = \frac{2}{c^2} \varphi(\vec{r}) \quad , \quad g_{00} = 1 + \epsilon_{00} = 1 + \frac{2\varphi(\vec{r})}{c^2}$

$\varphi(\vec{r})$  nach Newton:



$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_r \sum_u \frac{G m_u m}{|\vec{r} - \vec{r}_u|} = -\vec{\nabla} \frac{\varphi}{m} \quad , \quad \varphi(\vec{r}) = - \sum_u \frac{m_u G}{|\vec{r} - \vec{r}_u|}$$

Kraft auf  $m$  durch alle  $m_u$ .

Potential das  $m$  verspürt durch alle auch  $m_u$ .

dh: sieht in der hohen Korrelation zu diskutieren

$$a) \quad \frac{2\varphi}{c^2} \approx \left| \varphi = -\frac{G m_u}{r} \right| = \begin{cases} \text{Erde: } 10^{-9} \\ \text{Neutronensterne: } 10^{-1} \\ \text{Schwarzes Loch: } > 1 \rightarrow \text{Theorie bricht zusammen} \\ \text{(typische Werte)} & \text{(nächste VL)} \end{cases}$$

b) gilt kann  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  als Integral diskutieren

7. Einfache Folgerungen aus Newton Grenzfall

## 7.1. Ruhe und physikalisch Vorgänge im Gravitationsfeld

$$\underbrace{c^2 d\tau^2}_{\text{Eigenzeit der Uhr}} = ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \Big|_{\substack{\alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ \text{ist } dx^\alpha = dx^\beta = 0 \\ \text{(Ortskoordinaten)}}} = g_{00} dx^0 dx^0$$

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} c dt = \sqrt{g_{00}} dt$$

2 Fälle mit (u) oder ohne (o) Gravitationsfeld:

ohne:  $g_{00}^{1/2} = 1$  ( $\epsilon_{00} = 0$ )  $\rightarrow \frac{d\tau}{dt_o} = 1 \rightarrow d\tau = dt_o$

Mit:  $g_{00}^{1/2} = (1 + 2\varphi/c^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \rightarrow \frac{d\tau}{dt_m} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} \rightarrow d\tau = dt_m \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$

$$\Downarrow \frac{dt_o}{dt_m} = 1 + \frac{\varphi}{c^2} < 1, \text{ weil } \varphi < 0$$

$$\boxed{dt_o < dt_m}$$

physikalisch Prozess im  
Gravitationsfeld verlaufen langsamer  
(Zeitdilatation im Gravitationsfeld)

## 7.2. Rotverschiebung v. Licht

Besondere Uhr: Entstehung v. Licht aus atomaren Systemen

ohne Gravitation  $\omega_o \sim \frac{1}{dt_o}$  mit Gravitation  $\omega_m \sim \frac{1}{dt_m}$

$$\frac{\omega_m}{\omega_o} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2} < 1 \quad \omega_m < \omega_o$$

Rotverschiebung bei Emission im Gravitationsfeld

im Vg. zu Exp. auf Erde, ist Korrektur etwa  $10^{-6} \omega_o$

### 7.3. Lichtgeschwindigkeit in fraktionsfeldern

ohne fraktion

$$\frac{ds^2}{SRT} = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = 0 \quad \text{Licht} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \rightarrow c = \frac{dr}{dt} \equiv \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

mit fraktion:

$$\frac{ds^2}{ART} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = 0 \quad \text{Licht} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \rightarrow c \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) = \frac{dr}{dt}$$

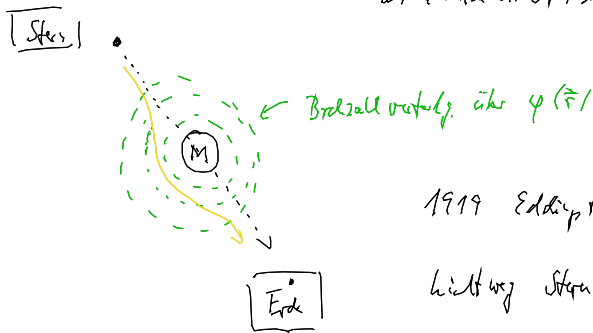
$g_{00} \neq g_{00}$

$$\frac{c_m}{c_0} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) < 1$$

Licht ist langsamer in Anwesenheit

von fraktion und kann durch  $\varphi(\vec{r})$

als Funktion d. Orts manipuliert werden  $\rightarrow$  Brechzahl effekt



1919 Eddingtons Expedition

Lichtweg Stern - Erde durch  $\varphi(\vec{r})$  modifiziert

Vorhersage: Erosion wird Medusenstar

### 8. Gravitationsfeldgleichungen

bisher metrischer Tensor nur im Newtonschen Fall, nur  $g_{00}$  modifiziert ( $\varphi \sim g_{00}$ )

Einstein: Gravitationsfeldgleichungen für  $g_{\alpha\beta}$  (alle Komponenten) die von Materieverteilung abhängen

#### 8.1. Newtonsche Gravitationsfeldgleichungen

Newton: 
$$\varphi(\vec{r}) = - \sum_u \frac{G m_u}{|\vec{r} - \vec{r}_u|}$$
 Unabhängig v. Probabilien u definiert

(1) 
$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho_M(\vec{r})$$
  $\leftarrow \rho_M$  ist Materieverteilung, f. Punktmasse  $\rho_M(\vec{r}) = \sum_u m_u \delta(\vec{r} - \vec{r}_u)$

$\uparrow$   
Laplaceoperator  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv \Delta$  d.h. grad

$$\Delta g_{00} = \frac{G \delta^3 \rho_M(\vec{r})}{c^2}$$

$$\text{an } g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

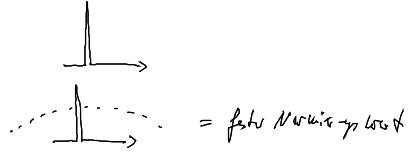
(1) - bestimmt das Gravitationspotential  $\varphi(\vec{r})$  das mittels  $\vec{g} = m \cdot \left( -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right)$

auf Punktmasse  $m$  wirkt,  $\rho_M$  ist beliebig, zunächst durch Punktmasse gegeben.

- muß sich Prüf und beweisen werden, über  $f(r) = \frac{1}{r}$ , muß zeigen daß  $\Delta f(r)$  ein  $\delta$ -Funkt. ist

a)  $\Delta f = 0$ , wenn  $\vec{r} \neq 0$

b)  $\int d^3r \Delta f = -4\pi$



wäre  $f$  eine Punktmasse durchsetzen, gilt dann  $f$   $\sum$  Punktmasse  
 $(\vec{r}_i = 0)$