

# Kanonische Mechanik:

was wir bisher nicht bedacht haben:

Mit Netz-Theorie ein kompletter Werkzeug für Mechanik  
 Moderne Sprache der Theorie unterscheidet sich davon,  
 weil man Formalismen verbessern kann

- $F_i = m\ddot{x}_i \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_r \rightarrow$  sehr unterschiedlich, oft kompliziert!
- a) Bewegungsgleichung sollen für alle Koordinaten gelten!
- b) ein einfacher Art, geometrische Nebenbedingungen bzw. zeitabhängige Zwangsbedingungen einbauen!

$\rightarrow$   $l = \text{konstant}$  - Fadenpendel  
 $m$   $\rightarrow$  Zwangsbedingungen die Bewegung auf sich erzwingt.  $\int_{r_2}^{r_1} \dot{r} = mg$

c) sehr zur Quantenmechanik vorbereiten!  
 mit vertauschbare Operatoren identifizieren!

d) Formalismus soll auch für Felder vorbereitet werden!

Notwendige mathematische Hintergründe!

① partielle Integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF}{dt} = F(t_2) - F(t_1)$$

$$F = f(t)g(t) \Rightarrow \dot{F}(t) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \dot{f}g = - \int_{t_1}^{t_2} f\dot{g} + f\dot{g} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

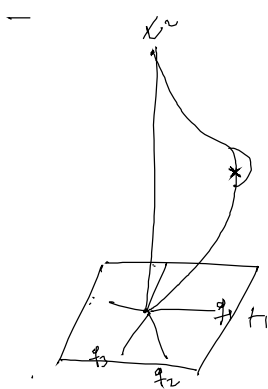
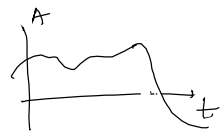
$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \dot{f}g = - \int_{t_1}^{t_2} f\dot{g}$$

② I. Jede Funktion A

→ zeitliche Funktion

$$\int A(t)f(t) dt = 0$$

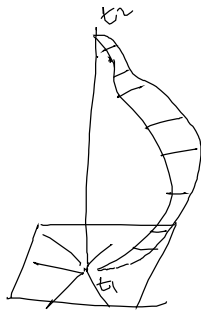
$$\forall A(t) = 0$$



- lokale Beschreibung  $(q_1, \dot{q}_1)$
- globale Beschreibung  $(q_1(t_1), q_1(t_2))$
- \* die sind äquivalent!

Prinzip kleinster Wirkung!

es gibt immer eine Bahn, welche den Wirkung minimiert



$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_i(t) + \alpha \dot{f}_i(t) = \text{neue Bahn} = \dot{q}_i$$

$$\dot{f}_i(t) = 0$$

$$\text{Wirkung} \Rightarrow W(\alpha)$$

$$\left. \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\text{Wirkung} = W = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \text{Lagrangian Funktion} = \mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = T - V ; T(\dot{q}) ; V(q) \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}, q)$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \dot{f}_i(t) \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int dt \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = f_i(t) \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int dt \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} f_i(t) \right)$$

$$\int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} f_i dt = \int dt f_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} dt$$

$$\int dt \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i = 0$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i = 0 \rightarrow \text{Euler-Lagrange Gleichung!}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$\text{Newton's energy: } L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)$$

$$\begin{matrix} q \rightarrow r \\ \dot{q} \rightarrow \dot{r} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m \ddot{r}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{r} = -\nabla V = f}$$

Zusammenfassung der Prinzip kleinsten Wirkung! (PKW)

- Einfügen der Lagrang Funktion  $L = T - V = L(q, \dot{q})$
- Aufschreiben der Wirkungsfunktion  $W = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q})$
- Auffinden der  $\hat{q}$  der  $W$  angruppe alle mögliche  $q_i : q_i(t_1) \rightarrow q_i(t_2)$  erlaubt macht
- $\left. \frac{\delta W}{\delta q} \right|_{t_1, t_2} = 0$

Komplexere Ableitung Newt. durch PKW

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0) = f(x_0)$$

$$f = f(x_0) + \delta f$$

gilt auf f. Wirkung  $\delta f(x, \delta x) = 0$

$$W(r) = W(r_0) + \delta W(r_0, r_0) = W(r_0)$$

$\delta W = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \delta \vec{r}(t) \Rightarrow W(\vec{r}) = W(r_0) + \delta W(\vec{r}_0)$$

- Einsetzen in PKW

$$W(r) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}(t)) \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \delta \dot{r}^2 + 2 \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}_0) + \delta r \cdot \nabla V(r_0) + \dots \right)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_0^2 - V(r_0) \right)}_{W(r_0)} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}} - \nabla V(r_0) \cdot \delta \vec{r} \right)}_{\delta W}$$

$$\rightarrow W(r) = W(r_0) + \delta W$$

$$m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r}) - m \ddot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r}$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}} - m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r}) - \nabla V(r_0) \cdot \delta \vec{r} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -m \ddot{\vec{r}}_0 - \nabla V(r_0) \right) \cdot \delta \vec{r} = 0$$

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = -\nabla V(\vec{r}_0)$$

Euler-Lagrange:  $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$  (\*)

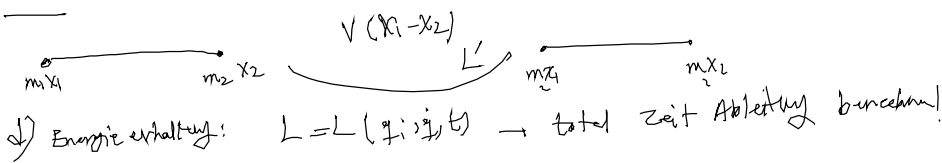
Bemerkungen

a) ~~\*)~~ Werte Lg zweite Art genannt (Erst kommt noch)

b) Newton's  
 $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} m\ddot{x} = -kx$

c) Impuls definition:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Wenn  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$  bestimmt  $\dot{q}_i$ , nennt man  $q_i$  zugleich als  $\frac{d}{dt} p_i = 0 \rightarrow$   
 Impuls ist eine erhaltunggröße!



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left( \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \quad \#$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad \text{Legendre transformation von } L \rightarrow H$$

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \text{Wenn } L \text{ unabhängig von Zeit ist } \Rightarrow H \text{ ist erhalten!}$$

- H  $\rightarrow$  Energie  $T = \sum \frac{m}{2} \dot{x}_i^2, V = V(x_i, t) \quad L = T - V$

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \frac{m}{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i, t) \\ &= \sum_i \left( m\dot{x}_i^2 - \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right) + V(x_i, t) \end{aligned}$$

$$\boxed{= T + V}$$