Kanonische Mechanik:

was wir bisher nicht bedeckt haben:

Mit Newt. Theorie ein kompletter Werkzeug f. Mechanik,
Moderne Sprache der Theorie unterscheidet sich davon,
weil man Formalisierungen verbessern kann

- $f_i = m\ddot{x}_i \longrightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r$ → sehr unterschiedlich! oft kompliziert!

a) Bewegungsgleichung sollen für alle Koordinate gelten!

b) ein einfacher Art, geometrische Nebenbedingungen bzw. zugehörige Zwangskräfte einzubauen!

- l = konstant. — Fadenpendel $f_z^{zw} = mg$
m
- Zwangskräfte die Bewegung auf sich erzwingt.

c) sehr zur Quanten Mechanik vorbereiten!
Mit Vertauschbare Operatoren identifiziert!

d) Formalismus soll auch für Felder aufbereitet werden!

Notwendige Mathematische Hintergründe!

① partielle Integration:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dF}{dt} = F(t_2) - F(t_1)$$

$$F = f(t)\, g(t) \Rightarrow \dot{F}(t) = \dot{f} g + \dot{g} f$$

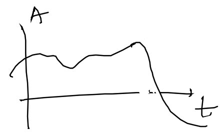
$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \dot{f} g = -\int_{t_1}^{t_2} f \dot{g} + fg \Big|_{t_1}^{t_2} \qquad fg \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \dot{f} g = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{g} f}$$

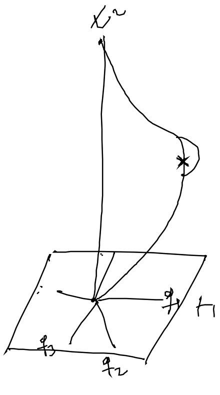
② I. Jede Funktion A

beliebige Funktion

$$\boxed{\int A(t) f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad A(t) = 0}$$



-

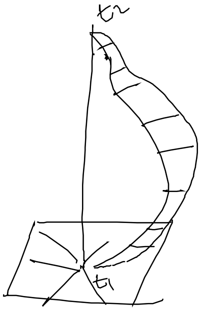


- lokale Beschreibung $(q_i, \dot{q}_i)$
- globale Beschreibung $(q_i(t_1), q_i(t_2))$

* die eine ausgewählt!

— Prinzip kleinster Wirkung!

es gibt immer eine Bahn welcher den Wirkung minimalisiert



$\hat{q}_i(t) + \alpha f_i(t)$ = neue Bahn $= q_i$

$f_i(t)\big|_{t_1,t_2} = 0$

Wirkung $\Rightarrow W(\alpha)$

$$\frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0 \quad ; \quad \text{Wirkung} = \quad W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

$L \to$ Lagrang Funktion $=: L = T - V$

— $L = T - V$: $T(\dot q)$; $V(q)$ $\Rightarrow L = L(\dot q, q)$

$$\frac{\partial \dot q_i}{\partial \alpha} = \dot f_i(t) \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int dt \sum_i \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{f_i(t)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{g} \underbrace{\frac{\partial \dot q}{\partial \alpha}}_{\dot f_i(t)} \Big)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = f_i(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f \dot g = -\int_{t_1}^{t_2} g \dot f \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int dt \sum \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} f_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \dot f_i(t) \Big)$$

$$\hookrightarrow \int \frac{\partial L}{\partial \dot q} \dot f_i\, dt = -\int f(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q}\, dt$$

$$= \int dt \sum \Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} \Big) f_i = 0$$

$$\sum_i \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \Big) = 0 \quad \to \text{Euler-Lagrang Gleichung!}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0$$

— Newtonian energy: $L = \frac{1}{2} m \dot r^2 + V(r)$ $\qquad q \to r$, $\dot q \to \dot r$

$\ast\ \frac{\partial V}{\partial r} = \nabla V = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$\ast\ \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m \dot r = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = m \ddot r$ $\Rightarrow \boxed{m \ddot r = -\nabla V = f}$

Zusammenfassung der Prinzip kleinster Wirkung! (PKW)

- Einfügen der Lagrange Funktion $L = T - V = \mathcal{L}(q, \dot{q})$
- Aufschreiben der Wirkungsfunktion $W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q})$
- Auffinden der $\hat{q}$ der W angruppe alle möglichen $q_i : q_i(t_1) \to q_i(t_2)$ extremal macht
- $\left. f_i(t) \right|_{t_1, t_2} = 0$

- komplizierter Ableitung Newton g. durch PKW

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r)$$

$$f = f(x_0) + \delta f$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) = f(x_0)$$

gilt auf f. Wirkung $\delta f(x, \delta x) = 0$

$$W(r) = W(r_0) + \delta W(\delta r, r_0) = W(r_0)$$

$$\delta W = 0$$

$$W(\vec{r}) = W(r_0) + \delta W(\vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \delta\vec{r}(t) \Rightarrow$$

- einsetzen in PKW

$$W(r) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}(t)^2 - V(\vec{r}(t)) \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \left(\dot{\vec{r}}_0^2 + \delta\dot{\vec{r}}^2 + 2 \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta\dot{\vec{r}} \right) - V(\vec{r}_0) + \delta r \cdot \nabla V(r_0) + \cdots \right)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r_0) \right)}_{W(r_0)} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta\dot{\vec{r}} - \nabla_0 V(r_0) \cdot \delta r \right)}_{\delta W}$$

$$\to W(r) = W(r_0) + \delta W$$

$$m \dot{\vec{r}} \cdot \delta\dot{\vec{r}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - m \ddot{r}\, \delta r$$

$$\delta W = \int dt \left(m \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} - m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \nabla V(r_0)\, \delta r \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{r} - \nabla V(r_0)) \cdot \delta r = 0$$

$$m\ddot{r} = -\nabla V(\vec{r}_0)$$

Euler-Lagrange : $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0$ (*)

Bemerkungen

a) (*) Werde L-g zweite Arte genannt (Erst kommt noch)

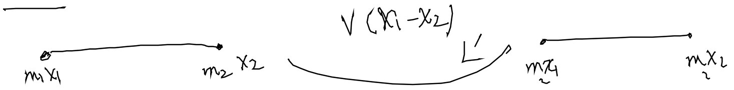
b) Vertrauen:

$L = \frac{m}{2}\dot x^2 - \frac{kx^2}{2} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;,\; \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x \xrightarrow{\frac{d}{dt}} m\ddot x = -kx$

c) Impuls definition: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

Wenn $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ / bestimmte q_i, nennt man q_i zyklisch und $\frac{d}{dt} p_i = 0 \rightarrow$

Impuls ist eine Erhaltungsgröße!



d) Energieerhaltung: $L = L(q_i, \dot q_i, t) \rightarrow$ total Zeit Ableitung berechnen!

$$\frac{d}{dt} L = \partial_t L + \sum_i \left(\dot q_i \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)$$

$$= \partial_t L + \sum_i \left(\dot q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \ddot q \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \right)$$

$$= \partial_t L + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)$$

$$\Rightarrow -\partial_t L = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_i \dot q \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L \right)}_{\rightarrow H}$$

$$H = \sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L$$ Legendre transformation von $L \rightarrow H$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$ $\Rightarrow$ Wenn L unabhängig von Zeit ist $\Rightarrow$ H ist erhalten!

— H $\rightarrow$ Energie $T = \sum \frac{m}{2}\dot x_i^2$, $V = V(x_i, t)$ $L = T - V$

$$H = \sum_i \frac{m}{2} \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} \dot x - \sum_i \frac{m}{2} \dot x^2 + V(x, t)$$

$$= \sum_i \left(m\dot x^2 - \frac{m}{2}\dot x^2 \right) + V(x_i, t)$$

$$\boxed{= T + V}$$