2.5. Lagrange-Feldgleichungen

2.5.1. Feldgleichungen durch Analogiebetrachtungen

Teilchen $\vec{r}(t)$ | Feld $\vec{\phi}(\vec{r}, t)$

Koordinaten $x_i \to \dot{x}_i$ | Koordinaten $\phi_i \to \dot{\phi}_i \equiv \partial_t \phi_i \equiv \phi_{i/t}$

$\to \partial_{x_j} \phi_i \equiv \phi_{i/j}$

Variable Zeit $\underline{t}$ | Variablen: Zeit $\underline{t}$, Ort $\underline{\vec{r}}$

$$\underbrace{S_T}_{\text{Wirkung}} = \int d\underline{t} \; \underbrace{L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}_{\text{Lagrange-Fkt.}}$$

$$S_F = \int d\underline{t} \int d^3\underline{\vec{r}} \; \underbrace{\mathcal{L}(\phi_i(\vec{r}, t), \phi_{i/t}, \phi_{i/j}, t)}_{\text{Lagrangedichte}}$$

$\delta S_T = 0$ ergibt Bahnkurven | $\delta S_F = 0$ ergibt Feldgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i/t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i/j}}}$$

freies Teilchen: $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = T$ | freies Feld: $\mathcal{L}_F = ?$

mit Potential: $L = T - V$ | Feld mit Quellen $\mathcal{L} = ?$ — Sinnvoll

muß Newtongleichung erfüllen | muß f. Gravitation: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M$ erfüllen

Massendichte

$$\rho_M = \sum_i m_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

2.5.2. Das Gravitationsfeld

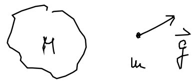
Erinnerung: Def. d. elektrischen Felds $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{f}_{el}}{q}$ $\hat{=}$ Vermessg. Probeladung q

" Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{f}_g}{m}$ $\hat{=}$ Vermessg. Probemasse m

„Feldbegriff" eingeführt

Fragestellung: $\mathcal{L}$ zu finden und mittels φ bzw $\vec{g}$ auszudrücken (Felder!)

Start ist potentielle Energie V einer Massenverteilung



m $\quad \vec{g}(\vec{r},t)$ bzw $\varphi(\vec{r},t)$

mit $\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{n,i}^{N,N} \frac{G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|} \longrightarrow V(\varphi \text{ oder } \vec{g})$$

Doppelzählung vermeiden

Summe über WW Paare

verwende $\rho_M(\vec{r}) = \sum_i m_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, $\rho_M(\vec{r}\,') = \sum_n m_n \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n)$

$$\leadsto \quad V = -\frac{G}{2} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho_M(\vec{r})\, \rho_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \text{, teste!}$$

mit
$$\varphi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -G \int d^3r' \, \frac{\rho_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\leadsto \quad V = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho_M(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})$$

ρ_M loswerden mittels $\Delta\varphi = 4\pi G \rho_M$, $\rho_M = \frac{\Delta\varphi}{4\pi G} = \frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = -\frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$

$$\leadsto \quad V = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi G} \int d^3r \, \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$$

partielle Integration

$$\boxed{V = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \, \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \sum_i \left(\partial_i \varphi(\vec{r})\right)^2}$$

von ρ_M abstrahiert und betrachten Feld $\vec{g}(\vec{r})$

a) freier Raum

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{8\pi G}\,\vec{g}(\vec{r})\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi G}\sum_i(\underbrace{\partial_i\varphi}_{\text{Ableitung von }\varphi})^2 \quad \text{Ansatz!}$$

Feldgleichungen testen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi_{,j}} = -\frac{1}{8\pi G}\sum_i\frac{\partial}{\partial\varphi_{,j}}\varphi_{,i}^2 =$$

$$= -\frac{1}{8\pi G}\sum_i 2\varphi_{,i}\,\delta_{ij} = -\frac{1}{4\pi G}\varphi_{,j}$$

einsetzen in $\mathcal{L}$-Feldgleichungen.

$$= -\frac{1}{4\pi G}\partial_j\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\dot{\varphi}} + \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi_{,j}}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{4\pi G}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi = -\frac{1}{4\pi G}\Delta\varphi$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$ Gravitationsfeldgleichung im freien Raum

b) Raum mit Massenverteilung

Ansatz $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \underbrace{\mathcal{L}_{F-M}}_{\text{WW zwischen Feld und Materie}}$

$$L_{F-M} = \underbrace{-V}_{\text{Teilchen im Feld}} = -\sum_n m_n\,\varphi(\vec{r}_n) = -\int d^3r\sum_n m_n\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)\,\varphi(\vec{r}) = -\int d^3r\,\rho_M(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})$$

$$\curvearrowright \mathcal{L}_{F-M} = -\rho_M(\vec{r})\cdot\varphi(\vec{r})$$

Einsetzen in Lagrange Feldgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho_M(\vec{r}) \underset{\text{sieh Term oben}}{\Longrightarrow} \underbrace{\boxed{\Delta\varphi = 4\pi G \rho_M}}_{\text{Poissongleichung}}$$

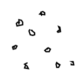
Gravitationsfeldgleichung im massebelegten Raum

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{F-M} = -\frac{1}{8\pi G}\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)^2 - \rho_M(\vec{r})\,\varphi(\vec{r}) = \mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,i})$$

2.5.3. Lösung der Poissongleichung f. Bsp.

a) Übergang v. Massepunkten zu Massendichte

$$\rho_M(\vec{r}) = \sum_n m_n\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \xrightarrow[\text{Mittelung}]{} \langle \rho_M \rangle$$ („verschmierte Dichte")



Mittelung:

$$g(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| > \\ 1 & |\vec{r}| \leq a \end{cases} \cdot \frac{1}{\Delta V}$$

ΔV ← Kugelvolumen mit Radius a

Greife Raumpunkt $\vec{r}$ und sammle alle $\vec{r}_n$ im Radius a

$$\langle \rho_M \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3r'\, g(\vec{r}\,' - \vec{r})\, \rho_M(\vec{r}\,')$$

glätten der Verteilung

$$= \frac{1}{\Delta V} \underbrace{\sum_{n \in \Delta V} m_n\, g(\vec{r} - \vec{r}_n)}$$

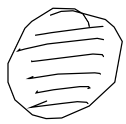
$$\sum_{\substack{n \in \Delta V \\ \text{am Stelle } r}} m_n = \Delta M(\vec{r})$$

$$= \frac{\Delta M(\vec{r})}{\Delta V} \equiv \langle \rho_M(\vec{r}) \rangle \;\hat{=}\; \text{kontinuierliche Massendichte } \langle \rho_M(\vec{r}) \rangle \rightarrow \rho_M(\vec{r})$$

$a \leq$ experimentelle Auflösung

b) Beispiel: homogene Kugel

Modell $\rho_M = \frac{M}{V} =$ konstant



für $\vec{r} \leq R$ sonst $\rho_M = 0$

lösen: $\Delta\varphi = 4\pi G \rho_M$ $\quad \Delta \;\hat{=}\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$, Kugelsymmetrie ∂ nur von $|\vec{r}|$ abhängig

nachschlagen: $$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r \varphi\right) = 4\pi G \rho_M$$

innen: $$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r \varphi_i\right) = \frac{4\pi G M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$ $\qquad \rho_M = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen Kugel}}$

$$\partial_r\left(r^2 \partial_r \varphi_i\right) = 3GM\frac{r^2}{R^3}$$

Konstante (Integration)

$$r^2 \partial_r \varphi_i = GM\frac{r^3}{R^3} + A$$

$$\partial_r \varphi_i = GM\frac{r}{R^3} + \frac{A}{r^2}$$

$$\varphi_i = \frac{GMr^2}{2R^3} \underbrace{- \frac{A}{r}}_{A=0,\ \varphi \text{ soll gutartig sein}} + B$$

außen: $\frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2\,\partial_r\varphi_a\right) = 0$ Integrationskonstante

$$r^2\,\partial_r\varphi_a = C$$

$$\partial_r\varphi_a = \frac{C}{r^2}$$

$$\varphi_a = -\frac{C}{r} + D$$

$D = 0$, weil Potential im ∞ verschwindet

B, C sind noch offen

Stetigkeit von φ: $\varphi_a(R) = \varphi_i(R)$

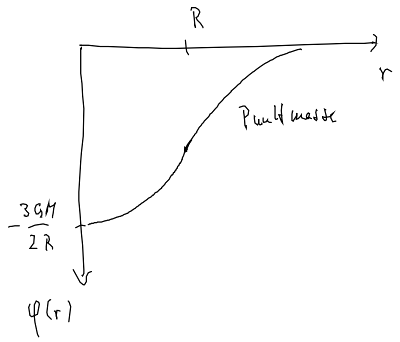
von $\vec{g}$: $\partial_r\varphi_a(r)\big|_{r=R} = \partial_r\varphi_i(r)\big|_{r=R}$

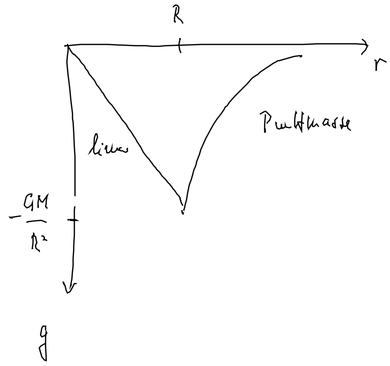
liefert B, C

$\Downarrow$

$$\varphi_a = -\frac{GM}{r} \qquad g_a = -\frac{GM}{r^2} \qquad \left(\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi\right)$$

$$\varphi_i = \frac{GM}{2R}\left(-3 + \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad g_i = -\frac{GM}{R^2}\,\frac{r}{R}$$





Potential/Feld einer homogenen massebehafteten Kugel sieht im Außenraum wie Punktmasse aus, im Innern steigt die Feldstärke linear, anziehend!