

2.5. Lagrange - Feldgleichungen

2.5.1. Feldgleichungen durch Analogie betrachtungen

Teilchen $\vec{r}(t)$
 Koordinate $x_i \rightarrow \dot{x}_i$

Feld $\vec{\phi}(\vec{r}, t)$
 Koordinate $\phi_i \rightarrow \dot{\phi}_i \equiv \partial_t \phi_i \equiv \phi_{i,t}$
 $\rightarrow \partial_{x_j} \phi_i \equiv \phi_{i,j}$

Variable Zeit t

Variablen: Zeit t , Ort \vec{r}

$S_T = \int dt L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$
 Wirk Lagrange fkt.

$S_F = \int dt \int d^3r L(\phi_i(\vec{r}, t), \phi_{i,t}, \phi_{i,j}, t)$
 Lagrange dichte

$\delta S_T = 0$ ergibt Bahnkurve

$\delta S_F = 0$ ergibt Feldgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,j}}$$

freies Teilchen: $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = T$
 mit Potential: $L = T - V$
 muß Newtongleichung erfüllen

freie Feld: $\mathcal{L}_F = ?$
 Feld mit Quelle $\mathcal{L} = ?$ ← Sinnung
 muß f. Funktion: $\Delta \phi = 4\pi G \rho_M$ erfüllen

Massendichte
 $\rho_M = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

2.5.2. Das Gravitationsfeld

Einkerbung: Def. d. elektrisch Felds $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{f}_{el}}{q} \hat{=} \text{Vermessg. Probeladung } q$
 " Gravitationsfeld $\vec{g}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{f}_g}{m} \hat{=} \text{Vermessg. Probemasse } m$

"Feldbegriff" ein geführt

Fragestellung: \mathcal{L} zu finden und mittels φ bzw. \vec{g} ausrechnen (Felds!)

Start ist potentielle Energie V einer Massenverteilung



$\vec{g}(\vec{r}, t)$ bzw. $\varphi(\vec{r}, t)$
mit $\vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi$

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow V(\varphi \text{ oder } \vec{g})$$

↑
Doppeltzählung vermeiden

↖
Summe über alle Paare

behalte $\rho_M(\vec{r}) = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, $\rho_M(\vec{r}') = \sum_k m_k \delta(\vec{r}' - \vec{r}_k)$

$$\Downarrow V = -\frac{G}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_M(\vec{r}) \rho_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ fertig!}$$

mit $\varphi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -G \int d^3r' \frac{\rho_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Downarrow V = \frac{1}{2} \int d^3r \rho_M(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

ρ_M loswerden mittels $\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M$, $\rho_M = \frac{\Delta \varphi}{4\pi G} = \frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\frac{1}{4\pi G} \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$

$$\Downarrow V = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi G} \int d^3r \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$$

↑
partielle Integration

$$V = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r \sum_i (\partial_i \varphi(\vec{r}))^2$$

via ρ_M abhangig und betrachte Feld $\vec{g}(\vec{r})$

a/ freier Raum

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{8\pi G} \underbrace{\vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r})}_{\text{Abk. von } \varphi} = -\frac{1}{8\pi G} \sum_i (\partial_i \varphi)^2 \quad \text{Auswahl!}$$

Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_{ij}} = -\frac{1}{8\pi G} \sum_i \frac{\partial}{\partial \varphi_{ij}} \varphi_{li}^2 = \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \sum_i 2 \varphi_{li} \delta_{ij} = -\frac{1}{4\pi G} \varphi_{ij} \\ &= -\frac{1}{4\pi G} \partial_j \varphi \end{aligned}$$

Einsetzen in \mathcal{L} -Feldgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_{ij}}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{4\pi G} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = -\frac{1}{4\pi G} \Delta \varphi$$

$$\boxed{\Delta \varphi = 0} \quad \text{Poisson-Feldgleichung im freien Raum}$$

b) Raum mit Massenverteilung

$$\text{Auswahl } \mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{F-M}$$

WW zwischen Feld
und Materie

$$\mathcal{L}_{F-M} \stackrel{\text{Feld in Feld}}{=} -V = -\sum_n m_n \varphi(\vec{r}_n) = -\int d^3r \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \varphi(\vec{r}) = -\int d^3r \rho_M(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

$$\downarrow \mathcal{L}_{F-M} = -\rho_M(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r})$$

Einsetzen in Lagrange feldgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho_M(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M} \quad \begin{array}{l} \text{Erweitern feldgleichung} \\ \text{in massenbelegten Raum} \end{array}$$

sich Term
oben
Poissongleichung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{F-M} = -\frac{1}{8\pi G} (\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}))^2 - \rho_M(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = \mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,i})$$

25.3. Lösung der Poissongleichung f. Bsp.

a) Übergang v. Masspunkten zu Massendichte

$$\rho_M(\vec{r}) = \sum_u m_u \delta(\vec{r} - \vec{r}_u) \quad \xrightarrow{\text{Mittelung}} \quad \langle \rho_M \rangle \quad (\text{„massiv Dichte“})$$



Mittelung:

$$g(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| > a \\ 1 & |\vec{r}| \leq a \end{cases} \cdot \frac{1}{\Delta V} \quad \leftarrow \text{Kugelvolumen mit Radius } a$$

Gebirgspunkt \vec{r} und summiert alle \vec{r}_u im Radius a

$$\langle \rho_M \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3r' \underbrace{g(\vec{r}' - \vec{r})}_{\text{glatte der Verteilung}} \rho_M(\vec{r}')$$

$$= \frac{1}{\Delta V} \sum_{u \in \Delta V} m_u \underbrace{g(\vec{r}' - \vec{r}_u)}$$

$$\sum_{\substack{n \in \Delta V \\ \text{au Stelle } r}} m_n = \Delta M(\vec{r})$$

$$= \frac{\Delta M(\vec{r})}{\Delta V} \equiv \langle \rho_M(\vec{r}) \rangle \stackrel{\text{kontinuierlich}}{\approx} \text{Massendicht } \langle \rho_M(\vec{r}) \rangle \rightarrow \rho_M(\vec{r})$$

a. experimentelle Aufklärung

6/ Beispiel: homogener Kugel

Modell $\rho_M = \frac{M}{V} = \text{konstant}$  für $\vec{r} \leq R$ sonst $\rho_M = 0$

Lösung: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M$ $\Delta \hat{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, Kugelgleichung ρ nur von r abhängig

nach Schlägen: $\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi) = 4\pi G \rho_M$

innen: $\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi_i) = \frac{4\pi G M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$ $\rho_M = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen Kugel}}$

$$\partial_r (r^2 \partial_r \varphi_i) = 3GM \frac{r^2}{R^3}$$

$$r^2 \partial_r \varphi_i = GM \frac{r^3}{R^3} + A$$

$$\partial_r \varphi_i = GM \frac{r}{R^3} + \frac{A}{r^2}$$

$$\varphi_i = \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} - \frac{A}{r} + B$$

~~~~~

$A=0$ ,  $\varphi$  soll gutartig sein

außen:  $\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi_a) = 0$  Integrationskonstante

$$r^2 \partial_r \varphi_a = C$$

$$\partial_r \varphi_a = \frac{C}{r^2}$$

$$\varphi_a = -\frac{C}{r} + D$$

$D = 0$ , weil Potential im  $\infty$  verschwindet

$B, C$  sind noch offen

Stetigkeit von  $\varphi$ :  $\varphi_a(R) = \varphi_i(R)$   
 von  $\vec{g}$ :  $\partial_r \varphi_a(r) \Big|_{r=R} = \partial_r \varphi_i(r) \Big|_{r=R}$  } liefert  $B, C$

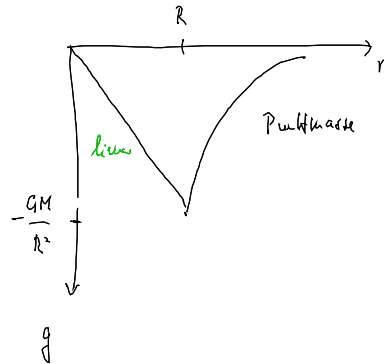
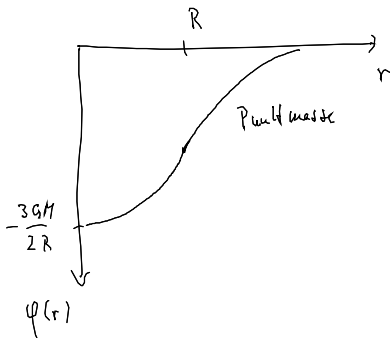
↓

$$\varphi_a = -\frac{GM}{r}$$

$$g_a = -\frac{GM}{r^2} \quad \left( \vec{g} = -\vec{v} \nabla \varphi \right)$$

$$\varphi_i = \frac{GM}{2R} \left( -3 + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$g_i = -\frac{GM}{R^2} \frac{r}{R}$$



Potential / Feld einer homogenen massenbehafteten Kugel sieht im Außenraum wie Punktmasse aus, in Innen steigt die Feldstärke linear, anziehend!