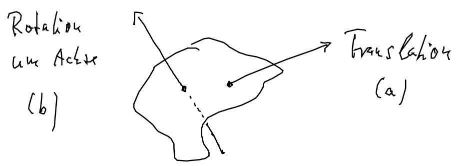
2. Starrer Körper

Starrer Körper (SK): Massepunktsystem bei dem der Abstand der Massepunkte untereinander zeitlich konstant ist, im Gegensatz zu einzelnem Massepunkt: ausgedehntes Objekt, konstante Abstände: Zwangsbedingung (interne Kräfte)

Freiheitsgrade eines SK:



a) momentane Bewegung über Schwerpunkt $\vec{R}(t)$
$\rightarrow$ 3 Freiheitsgrade der Translation

b) momentane Drehachse mit $\perp$ Drehung: $d\varphi$
$\hat{=}$ 1 Freiheitsgrad

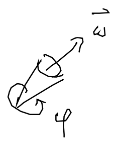
Richtung der Drehachse wird über 2 weitere $\sphericalangle$ festgelegt $\hat{=}$ 2 Freiheitsgrade

$\Rightarrow \exists$ 6 Freiheitsgrade

(3 Translation, 3 Rotation)

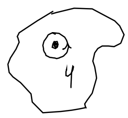
Klassifizierung nach mögl. Bewegung:

- Kreisel: SK, an einem Punkt fixiert $\rightarrow$ 3 FG der Rotation



- physikalisches Pendel: an einem Punkt fixiert + Rotation um feste Achse

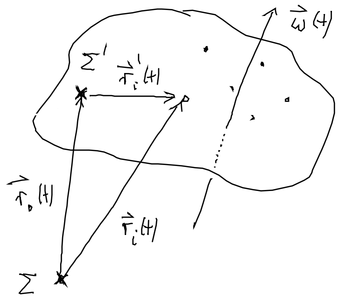
$\rightarrow$ 1 FG d. Rotation



2.1. Kinematik

2.1.1. Beschreibung der Bewegung: 2 Koordinatensysteme

Σ: raumfest (Laborsystem), Σ' körperfest, damit mitbewegt, rotiert + transliert mit SK mit



$\vec r_0$: fester Punkt im SK, später: $\vec r_0 = \vec R$ sinnvoll

$$\vec r_i(t) = \vec r_0(t) + \vec r_i{}'(t) \qquad (\text{Ort } \vec r_i)$$

$$\dot{\vec r}_i(t) = \dot{\vec r}_0(t) + \dot{\vec r}_i{}'(t) \qquad (\text{Geschwindigkeit } \dot{\vec r}_i)$$

$$= \dot{\vec r}_0(t) + \underbrace{\dot{\vec r}_i{}'(t)\Big|_{\text{im } \Sigma'\text{-System gemessen}}}_{\substack{\text{die zeitliche Änd. der Position von } \vec r_i{}' \text{ im}\\ \text{mitbewegten System } = 0 \text{, Bedingg. SK}\\ (\text{Abstand zu Ursprung } \Sigma' \text{ sind Konstant})}} + \vec\omega(t)\times\vec r_i{}'(t)\Big|_{\text{im } \Sigma'\text{-Syst gemessen}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec r}_i = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega\times\vec r_i{}'$$

Umrechng. zwischen Σ/Σ'

2.1.2. Kinetische Energie und Trägheitstensor

um Geometrie zu definieren und T zu definieren

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec r}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec r}_0 + \vec\omega\times\vec r_i{}'\right)^2 , \qquad \text{Wahl: } \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fordern}}}{\vec r_0 \equiv \vec R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec r_i$$

$$\underline{\underline{\vec R}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\left(\vec r_0 + \vec r_i{}'\right) = \frac{\overbrace{\sum_i m_i}^{=M}}{M}\vec r_0 + \sum_i m_i\vec r_i{}' = \underset{\substack{\uparrow\\ \vec r_0 = \vec R}}{\vec R} + \underline{\underline{\underbrace{\sum_i m_i\vec r_i{}'}_{=0}}}$$

$= 0 \ \hat{=}$ Schwerpunkt in Σ' muß bei Null sein

$$\Rightarrow \quad \sum_i m_i\vec r_i{}' = 0 \qquad \text{merken!}$$

$$\Rightarrow \quad T = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec R} + \vec\omega\times\vec r_i{}'\right)^2 = \underline{\sum_i}\frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec R}^2 + 2\dot{\vec R}\cdot\left(\vec\omega\times\underline{\vec r_i{}'}\right) + \left(\vec\omega\times\vec r_i{}'\right)^2\right)$$

Summe d. mittleren Terms verschwindet

$$T = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}'\right)^2$$

$\underbrace{\frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2}$ kinetisch Energie der Translation, nur über $\vec{R}$ gegeben

$\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}'\right)^2}$ kinetisch Energie der Rotation, enthält Geometrie $\left(\sum_i\right)$ + Winkelgeschwindigkeit $(\vec{\omega})$

$$T_{Rot} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_i{}'\right)^2$$

verwende: $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 = \vec{A}^2\vec{B}^2 - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2$ (Beweis über Koordinatendarstellung und ε-Tensor)

$$T_{Rot} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\sum_k \omega_k^2 \sum_m x_m'^2(i) - \sum_k \omega_k x_k'(i)\sum_l \omega_l x_l'(i)\right)$$

$\left(\vec{A} = \vec{\omega},\ \vec{B} = \vec{r}_i{}' = \left(x_1'(i), x_2'(i)\ x_3'(i)\right),\ \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right)$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\sum_{kl}\left(\delta_{lk}\sum_m x_m'^2(i) - x_k'(i)\,x_l'(i)\right)\omega_k\,\omega_l$$

$$\boxed{T_{Rot} = \sum_{kl}\frac{\Theta_{kl}}{2}\,\omega_k\,\omega_l}$$

kinetisch Energie eines SK (analog MP $\frac{m}{2}vv$)

Bemerkungen:

a) Matrix $\Theta_{kl} = \sum_i m_i\left(\sum_m x_m'^2(i)\,\delta_{kl} - x_k'(i)\,x_l'(i)\right)$

bestimmt den Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ über Matrixdarstellung Θ_{kl}

b) Rotationsenergie vollständig bestimmt wenn $\hat{\Theta}, \vec{\omega}$ bekannt ist

c) Θ_{kl} wird in Σ' berechnet, bisher nur Ursprung festgelegt $(\vec{R})$ $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$

aber die Achsenausrichtung ist frei wählbar

d) Lage der MP „i" bestimmt Θ_{kl} :

$$\Theta_{kl} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \left(y'^2(i) + z'^2(i)\right) & -\sum_i m_i\, x'(i)\, y'(i) & -\sum_i m_i\, x'(i)\, z'(i) \\ -\sum_i m_i\, y'(i)\, x'(i) & \sum_i m_i \left(x'^2(i) + z'^2(i)\right) & -\sum_i m_i\, y'(i)\, z'(i) \\ -\sum_i m_i\, z'(i)\, x'(i) & -\sum_i m_i\, z'(i)\, y'(i) & \sum_i m_i \left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) \end{pmatrix}$$

e) Θ_{kl} ist symmetrisch, reell $\Theta_{kl} = \Theta_{lk}$

und kann daher immer diagonalisiert werden: $\Theta_{kl} \rightarrow \Theta_{kl}^{HA} = \delta_{kl}\,\Theta_{kl}^{HA}$

das zugehörige System Σ' wird Hauptachsensystem genannt (HA)

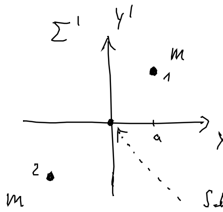
2.1.3. Trägheitstensoren an Punktsystem

Schritte: 1) Schwerpunkt $\vec{R}$ in Σ bestimmen

2) in diesen Punkt Σ' Ursprung legen, z.B. Orientierung egal

3) Elemente Θ_{kl} über $\sum_i$ und Lage in Σ' bestimmen

Beispiel:



Hantelproblem: 2 MP in Ebene $z' = 0$

Schwerpunkt = Σ' Ursprung (Schritt 1, 2)

Schritt 3: $\vec{r}_1 = (a, a, 0)$, $\vec{r}_2 = (-a, -a, 0)$

$$\Theta_{xx} = \sum_{i=1}^{2} m_i \left(y'^2(i) + z'^2(i)\right) = \underbrace{m a^2}_{i=1} + \underbrace{m a^2}_{i=2} = 2ma^2$$

$\forall\, \Theta_{kl}$ ausrechnen

$$\Theta_{kl} = \begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 \end{pmatrix}$$

2.1.4. Berechnung v. Trägheitstensoren kontinuierlicher Körper

Übergang v. diskreter Verteilung von MP zu Massedichte

Argumente folge d. Diskussion bei Gravitationspotential kontinuierlicher Masseverteilungen

$$\sum_i m_i\, f(i) \longrightarrow \int d^3r\, \rho_M(\vec{r})\, f(\vec{r}) \quad , \; \rho_M \hat{=} \text{Massedichte} = \frac{dm}{dV}$$

$$\Theta_{kl} = \sum_i m_i \left(\sum_n x_n'^2(i)\, \delta_{kl} - x_k'(i)\, x_l'(i) \right)$$

$$\longrightarrow \quad = \int d^3r'\, \rho_M(\vec{r}')\left(\vec{r}'^2\, \delta_{kl} - x_k' x_l'\right) \quad , \; \vec{r}' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$$

Beispiel: homogene Kugel $\hat{=}$ Konstante Massedichte $\rho_M = \text{konst}$, Radius R_0

$$\Theta_{kl} = \rho_M \left(\int d^3r'\, \vec{r}'^2\, \delta_{kl} - \int d^3r'\, \underbrace{x_k' x_l'}_{z'^2} \right) \quad , \text{ jetzt Kugelkoordinaten f. } \vec{r}'$$

$$z'^2 = r'^2 \cos^2\vartheta$$

$k = l = z$

$$\Theta_{zz} = \rho_M \left(4\pi \frac{R_0^5}{5} - \underbrace{2\pi}_{\varphi\text{-Integral}} \underbrace{\int_0^{R_0} dr'\, r'^2\, r'^2}_{\text{Kugelkoordinate i.e. } r' = |\vec{r}'|} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin\vartheta\, \cos^2\vartheta}_{\text{Kugelkoordinaten, } \vartheta} \right.$$

Substitution: $x = \cos\vartheta$

$$\Theta_{zz} = \rho_M \cdot \frac{8\pi}{15} R_0^5 \,, \quad \text{mit } \rho_M = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R_0^3}$$

M, Gesamtmasse

$$\underline{\underline{\Theta_{zz} = \frac{2}{5} M R_0^2}}$$

ist das Trägheitsmoment d. Kugel

explizite Rechnung $l \neq k \longrightarrow$ Null

$$\Theta_{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} M R_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} M R_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} M R_0^2 \end{pmatrix}$$