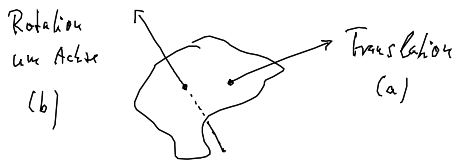


2. Starrer Körper

Starrer Körper (SK): Massepunktsystem bei dem der Abstand der Massepunkte untereinander zeitlich konstant ist, im Gegensatz zu einem Massenpunkt:
ausgedehntes Objekt, konstante Abstände: Zwangsbedingung (interne Kräfte)

Freiheitsgrad eines SK:



$\Rightarrow \exists 6$ Freiheitsgrade

(3 Translation, 3 Rotation)

a) momentane Bewegung über Schwerpunkt $\vec{R}(t)$

$\rightarrow 3$ Freiheitsgrade der Translation

b) momentane Drehachse mit \perp Drehung: $d\varphi$

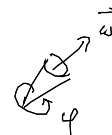
$\hat{=} 1$ Freiheitsgrad

Richtung der Drehachse wird über 2 weitere \times

festgelegt $\hat{=} 2$ Freiheitsgrade

Klassifizierung nach ungl. Bewegung:

- Kreisel: SK, an einem Punkt fixiert $\rightarrow 3$ FG der Rotation



- physikalisches Pendel: an einem Punkt fixiert + Rotation um feste Achse

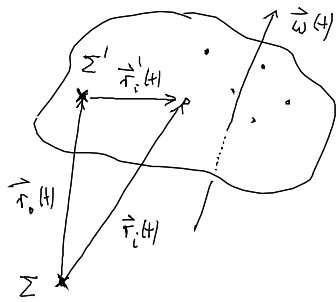
$\rightarrow 1$ FG d. Rotation



2.1. Kinematik

2.1.1. Beschreibung der Bewegung: 2 Koordinatensysteme

Σ : raumfest (Laborsystem), Σ' Körperfest, damit mitbewegt, rotiert + translatiert mit SK mit



\vec{r}_0 : fester Punkt im SK, später: $\vec{r}_0 = \vec{R}$ Schwerpunkt

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_i'(t) \quad (\text{Ort } \vec{r}_i)$$

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}_i'(t) \quad (\text{Geschwindigkeit } \dot{\vec{r}}_i)$$

$$= \underbrace{\dot{\vec{r}}_0(t)}_{\substack{\text{im } \Sigma\text{-System} \\ \text{gemessen}}} + \underbrace{\dot{\vec{r}}_i'(t)}_{\substack{\text{im } \Sigma'\text{-System} \\ \text{gemessen}}} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i'(t)$$

$$\downarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

Umkehrgl. zwischen Σ/Σ'

die zeitl. Änd. der Positionen von \vec{r}_i' im unbewegten System = 0, Bedinggg. SK (Abstand zu Urspr. Σ' sind konstant)

2.1.2. Kinetische Energie und Trägheitstensor

mit Geometrie zu definieren und T zu definieren

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2, \quad \text{Wahl: } \vec{r}_0 = \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i') = \frac{\sum_i m_i}{M} \vec{r}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i' = \vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}_i'$$

$\vec{r}_0 = \vec{R}$ $= 0 \hat{=} \text{Schwerpunkt in } \Sigma'$
 muß bei Null sein

$$\downarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \quad \text{wahr!}$$

$$\downarrow T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + 2 \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2 \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Summe d. mittleren Terms verschwindet}}$

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2}_{\text{kinetisch Energie der Translation, nur über } \vec{R} \text{ gegeben}} + \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2}_{\text{kinetisch Energie der Rotation, enthält geometrische } \left(\sum_i\right) \text{ + Winkelgeschwindigkeit } (\vec{\omega})}$$

$$T_{\text{Rot}} = \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2$$

verwende: $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = \vec{A}^2 \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ (Beweis über Koordinaten darstellbar und ϵ -Tensor)

$$T_{\text{Rot}} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\sum_k \omega_k^2 \sum_m x_m'^2(i) - \sum_k \omega_k x_k'(i) \sum_e \omega_e x_e'(i) \right)$$

$$\left(\vec{A} = \vec{\omega}, \vec{B} = \vec{r}'_i = (x_1'(i), x_2'(i), x_3'(i)), \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right)$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{ke} \left(\delta_{ek} \sum_m x_m'^2(i) - x_k'(i) x_e'(i) \right) \omega_k \omega_e$$

$$T_{\text{Rot}} = \sum_{ke} \frac{\Theta_{ke}}{2} \omega_k \omega_e$$

kinetisch Energie eines SK
(auch MP $\frac{m}{2} v v$)

Beweiswege:

a) Matrix $\Theta_{ke} = \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i) \delta_{ke} - x_k'(i) x_e'(i) \right)$

bestimmt den Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ über Matrixdarstellung Θ_{ke}

b) Rotationsenergie vollständig bestimmt wenn $\hat{\Theta}$, $\vec{\omega}$ bekannt ist

c) Θ_{ke} wird in Σ' berechnet, bis ins Ursprung festgelegt (\vec{R}) $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$

aber die Achsenrichtung ist frei wählbar

d) Lage des MP i bestimmt θ_{ke} :

$$\theta_{ke} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y'^2(i) + z'^2(i)) & -\sum_i m_i x'(i) y'(i) & -\sum_i m_i x'(i) z'(i) \\ -\sum_i m_i y'(i) x'(i) & \sum_i m_i (x'^2(i) + z'^2(i)) & -\sum_i m_i y'(i) z'(i) \\ -\sum_i m_i z'(i) x'(i) & -\sum_i m_i z'(i) y'(i) & \sum_i m_i (x'^2(i) + y'^2(i)) \end{pmatrix}$$

e) θ_{ke} ist symmetrisch, reell $\theta_{ke} = \theta_{ek}$

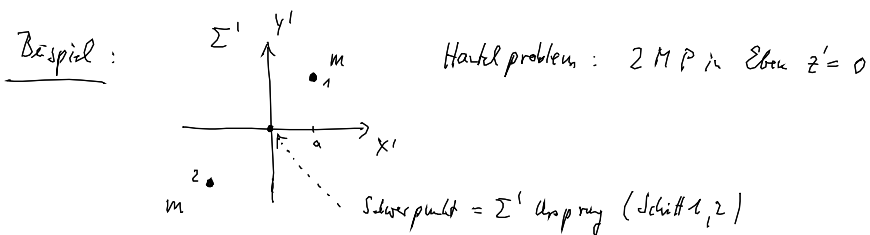
und kann daher immer diagonalisiert werden: $\theta_{ke} \rightarrow \theta_{ke}^{HA} = \delta_{ke} \theta_{ke}^{HA}$
 das zugehörige System Σ' wird Hauptachsen System genannt (HAS)

2.1.3. Trägheitstensor an Punktsystem

Schritt: 1) Schwerpunkt \vec{R} in Σ bestimmen

2) in diese Punkt Σ' Ursprung legen, z.z. Orientierung egal

3) Elemente θ_{ke} über Σ und Lage in Σ' bestimmen



Schritt 3: $\vec{r}_1 = (a, a, 0)$, $\vec{r}_2 = (-a, -a, 0)$

$$\theta_{xx} = \sum_{i=1}^2 m_i (y'^2(i) + z'^2(i)) = \underbrace{m_1 a^2}_{i=1} + \underbrace{m_1 a^2}_{i=2} = 2m_1 a^2$$

∪ Θ_{ke} am rechner

$$\Theta_{ke} = \begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 \end{pmatrix}$$

2.1.4. Berechnung v. Trägheitstensor kontinuierlicher Körper

Übergang v. diskret Verteilung von MP zu Massendichte

Argumente folgen d. Diskussion bei Gravitationspotential kontinuierlicher Massenverteilung

$$\sum_i m_i f(\vec{r}_i) \rightarrow \int d^3r \rho_M(\vec{r}) f(\vec{r}) \quad , \quad \rho_M \hat{=} \text{Massendichte} = \frac{dm}{dV}$$

$$\Theta_{ke} = \sum_i m_i \left(\sum_n x_n'^2(i) \delta_{ke} - x_k'(i) x_e'(i) \right)$$

$$\rightarrow = \int d^3r' \rho_M(\vec{r}') \left(\vec{r}'^2 \delta_{ke} - x_k' x_e' \right) \quad , \quad \vec{r}' = (x_1', x_2', x_3')$$

Beispiel: Homogene Kugel $\hat{=}$ konstante Massendichte $\rho_M = \text{konst.}$, Radius R_0

$$\Theta_{ke} = \rho_M \left(\int d^3r' \vec{r}'^2 \delta_{ke} - \int d^3r' \underbrace{x_k' x_e'}_{z'^2} \right) \quad , \quad \text{für Kugelkoordinaten f. } \vec{r}'$$

$k=l=2$

$$\Theta_{22} = \rho_M \left(4\pi \frac{R_0^5}{5} - 2\pi \int_0^{R_0} dr' r'^2 \underbrace{r'^2}_{\text{Kugelkoordinat in } r' = |\vec{r}'|} \int_0^\pi d\vartheta \underbrace{\sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{\text{Kugelkoordinaten, } \vartheta} \right)$$

$z'^2 = r'^2 \cos^2\vartheta$

φ -Integral

Substitution: $x = \cos \vartheta$

$$I_{zz} = \rho_M \cdot \frac{8\sqrt{3}}{15} R_0^5, \quad \text{mit } \rho_M = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R_0^3} \quad M, \text{ festes } \rho_M$$

$$\underline{\underline{I_{zz} = \frac{2}{5} M R_0^2}} \quad \text{ist das Trägheitsmoment d. Kugel}$$

explizit $I_{kl} = 0 \rightarrow$ Null

$$I_{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} M R_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} M R_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} M R_0^2 \end{pmatrix}$$