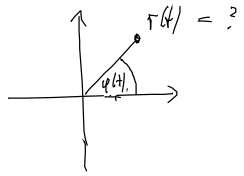
4.4. Berechnung der Bahnformen

E-Satz: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$, E = Konstant, vorgeben

Differentialgleichung für $r(t)$

nichtlinear!



1. Mgl. zur Lösung:

umstellen nach $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, Trennung der Variablen r, t mgl.

2. Mgl. zur Lösung:

Substitution: $s(t) = r^{-1}(t)$ $\left(\frac{1}{r} = s, \ \frac{1}{s} = r\right)$

i) $U(r) = -\frac{GmM}{r} \longrightarrow -GmMs = V(s)$

ii) $\frac{l_z^2}{2mr^2} \longrightarrow \frac{l_z^2}{2m} s^2$

iii) $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds}\dot{s} = -s^{-2}\dot{s}$

einsetzen in E-Satz:

$$\frac{m}{2}\frac{\dot{s}^2}{s^4} + \frac{l_z^2}{2m}s^2 + V(s) = E$$

aus Substit.: $s = s(t) \rightarrow s = s(\varphi)$ ergibt sich Schwingungsgleichung:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{ds}{d\varphi}}}{s'} \cdot \frac{l_z s^2}{m}$$

, verwenden führt auf:

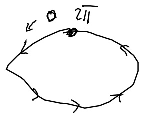
$$E = \frac{l_z^2}{2m}\left(s'^2 + s^2\right) + V(s) \quad \text{mit } s = s(\varphi)$$

nach φ differenzieren ergibt Oszillatorgleichung (ÜA) für $s(\varphi)$:

$$s'' + s = Gm^2 M / l_z^2$$

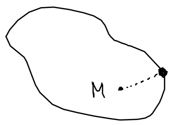
Lösung: $$s(\varphi) = \underbrace{A \sin\varphi + B\cos\varphi}_{\text{allg. Lsg. d. homogen Dgl.}} + \underbrace{Gm^2 M / l_z^2}_{\text{spezielle Lsg. d. inhomogen Dgl.}}$$

- gesucht sind Konstanten: A, B
- $\varphi \in [0, 2\pi]$, Lösung $s(\varphi)$ ist 2π periodisch und hat damit geschlossene Bahnkurve



resultiert aus spezielle $U(r)$ bzw $U(s)$ als Gravitationspotential, gilt nur für: r^2, $\frac{1}{r}$

weitere Rechnung erfordert A, B zur Diskussion der Bahnkurve:
aufgrund geschlossener Bahnkurve $\exists$ 1 sonnennächster Punkt $\circ$



$\varphi = 0$ $\qquad s = \frac{1}{r} \rightarrow s$ wird maximal

$$s \text{ extremal} \rightarrow s'\big|_{\varphi=0} = \left(A\cos\varphi - B\sin\varphi\right)\big|_{\varphi=0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow A = 0$$

$$s \text{ maximal} \rightarrow s''\big|_{\varphi=0} = -B < 0 \rightarrow B > 0$$

$$\downarrow \text{ mit } s = \frac{1}{r} = \frac{Gm^2 M}{l_z^2}\left(1 + B\frac{l_z^2}{Gm^2M}\cos\varphi\right)$$

$$\equiv \frac{1}{k}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

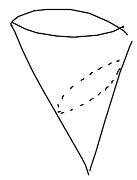
Def von ε, K

i) $K = \frac{l_z^2}{G m^2 M}$ ist mit l_z festgelegt (l_z = Konstant)

ii) $\varepsilon = B K > 0$ mit E festgelegt

Es existiert folgende Parameterdarstellung f. Bahnkurve:

$$\boxed{r = r(\varphi) = \frac{K}{1 + \varepsilon \cos\varphi}}$$



beschreibe die Kegelschnitte $\varepsilon > 0$:

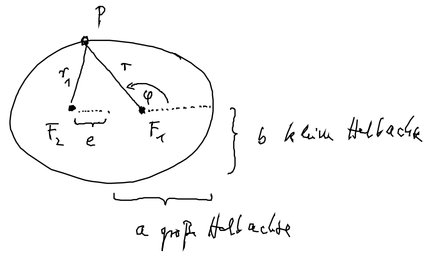
$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \varepsilon = 1 & \text{Parabeln} \\ \varepsilon > 1 & \text{Hyperbeln} \end{array}\right\} \text{ÜA 5}$$

4.5. Die Keplersche Gesetze

1. Keplersche Gesetz: Planeten bewegen sich auf Ellipsen in deren Brennpunkt die Sonne steht

Ellipse: Kurven aus Punkten P für die die Summe der Abstände r, r_1 von den Brennpunkten F_1, F_2 den konstanten Wert $2a$ haben:

$$\boxed{r + r_1 = 2a}$$



F_1: Koordinatenursprung

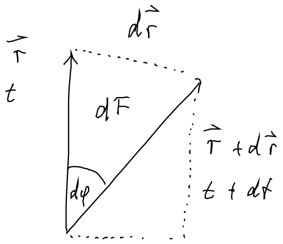
ein Bsp: $r_1 = r \rightarrow r = a$

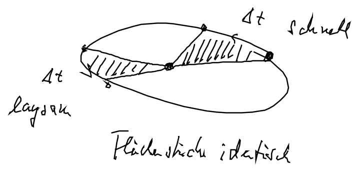
$$e^2 + b^2 = a^2$$
$$b^2 = a^2 - e^2$$

ÜA: Polarkoordinaten: $r = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $\qquad \varepsilon = \frac{e}{a}$, $k = \frac{b^2}{a}$

kartesische Koordinaten: $1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$

2. Keplersches Gesetz: Fahrstrahl von Sonne zu Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen: (Fläche proportional Zeit)





Def. Bogenmass: $d\varphi = \frac{|d\vec{r}|}{|\vec{r}|}$, $|\vec{r}| = r$

Fläche: $dF = \frac{1}{2}|\vec{r}||d\vec{r}| = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dF}{dt} = \underbrace{r^2 \frac{d\varphi}{dt}}_{\sim \text{ Drehimpuls}} = \text{Konstant} \longrightarrow \frac{dF}{dt} = c_0 \Rightarrow F = c_0 t \quad (F(0)=0,\ t_0 = 0)$$

$\longrightarrow$ Die überstrichene Fläche ist proportional zur durchlaufenen Zeit

3. Keplersches Gesetz: Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

$\frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_z}{2m} = \text{Konstant}$, Auswertung f. 1 vollen Umlauf

$F_{Ellipse} = \frac{l_z}{2m} T$, T: Periodendauer f. 1. Umlauf, $F_{Ellipse} = a \cdot b \cdot \pi$

$$T = \frac{2m}{l_z} a b \pi$$, quadrieren und mit a^{-3} multiplizieren

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2m}{l_z}\right)^2 a^2 b^2 \pi}{a^3} = \left(\frac{2m}{l_z}\right)^2 \frac{b^2}{a} \pi^2$$ = Konstant, unabhängig v. Planet ist zu zeigen

i/ $K = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$

ii/ $K = \frac{l_z^2}{G m^2 M}$

2 verschiedene Darstellg.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{(2m)^2}{l_z^2} \frac{l_z^2}{G m^2 M} \cdot \pi^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM}$$ = Konstant und unabhängig v. Planeten

$$\Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$ f. 2 verschiedene Planeten

Bemerkung: a/ $E = -\frac{GMm}{2a}$ E wird bestimmt durch große Halbachse a, ohne Beweis, erfolgt durch Einsetzen d. Bahnkurve in E-Satz

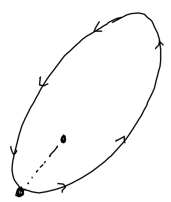
b/ 2 Modifikationen zum einfachen 2 Körperproblem:

- Einfluß der anderen Planeten $\rightarrow$ Korrektur d. Störungsrechnung (1850 erledigt)
- weiterer Anteil der Periheldrehung (winzig Merkur) $\rightarrow$ allgemeine Relativität

4.6. Periheldrehung

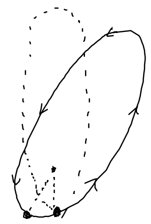
astronomische Beobachtungen legen Rosettebahn nahe

Newton 2 Körpertheorie: jenseits andere Planet $\exists$ Anteil Periheldrehg. nach ART



Ende = Start

T_{Newton}



Start Ende

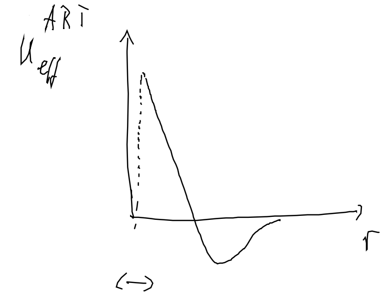
Perihel = sonnennächster Pkt

$T_{Newton} < T_{ART}$ → Ellipse wird um Perihel verkippt → $\exists\, \delta\varphi$ der zu Nichtperiodizität in ZII

ART – Energiesatz:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} - \underbrace{\frac{l_z^2}{2mr^2}\,\frac{r_s}{r}}_{\substack{\text{neu} \\ \text{proportional } \frac{1}{r^3}}} - \frac{GmM}{r} = \text{Konstant}$$

Bemerkg.:
- Zeitableitg. ist eigentlich Eigenzeitableitg.
- r_s Schwarzschildradius $\frac{2GM}{c^2}$ ↖ Lichtgeschwindigkeit
- im Sonnensystem ist der neue Term eine kleine Korrektur



relativistische Korrektur sind am Ursprung wichtig und in etwa r_s-breit

Abschätzg. der Periheldrehung

S-Gleichung wird modifiziert durch Zusatzterm:

$$\underbrace{s'' + s = \frac{Gm^2M}{\ell_z^2}} + \underbrace{\frac{3GM}{c^2}}_{\text{neu an ART}} s^2$$

nichtlinearer Oszillator!

Störungstheorie: $\underbrace{s = s_0 + s_1}_{\text{einsetzen.}}$

s_1: Kleine Korrektur

s_0: Newtonsche Lösung → Kreisnäherung: $s_0 = \frac{Gm^2M}{\ell_z^2}$

$(s''=0)$

$$s_1'' + s_1 = \frac{3GM}{c^2}\left(s_0^2 + 2s_0s_1 + \underbrace{\cancel{s_1^2}}_{\text{klein}}\right)$$

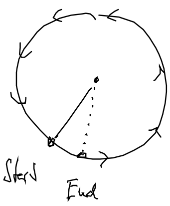
$$s_1'' + s_1 \underbrace{\left(1-\frac{6GM}{c^2}s_0\right)}_{\text{neue Schwingungsfrequenz } \omega^2} \approx \underbrace{\frac{3GM}{c^2}s_0^2}_{\text{Verschiebg. Ursprung d. Oszillator}}$$

$$\omega = \left(1-\frac{6GM}{c^2}\cdot\frac{GMm^2}{\ell_z^2}\right)^{1/2} \approx \underline{\underline{1}} - \frac{3G^2M^2m^2}{c^2\ell_z^2}$$

→ f. harmonische Lösung ergibt sich keine geschlossene Bahn unter $\varphi \to \underline{\underline{\varphi}} + \delta\cdot\varphi$

Korrekturfaktor

$$\omega_{Newton} > \omega_{ART} \to T_{Newton} < T_{ART}$$



Bei jedem Umlauf wird $\delta\cdot\varphi$ akkumuliert,

erklärt die Periheldrehung perfekt (Einstein 1915)

Merkur: $43''$ pro Erdjahrhundert