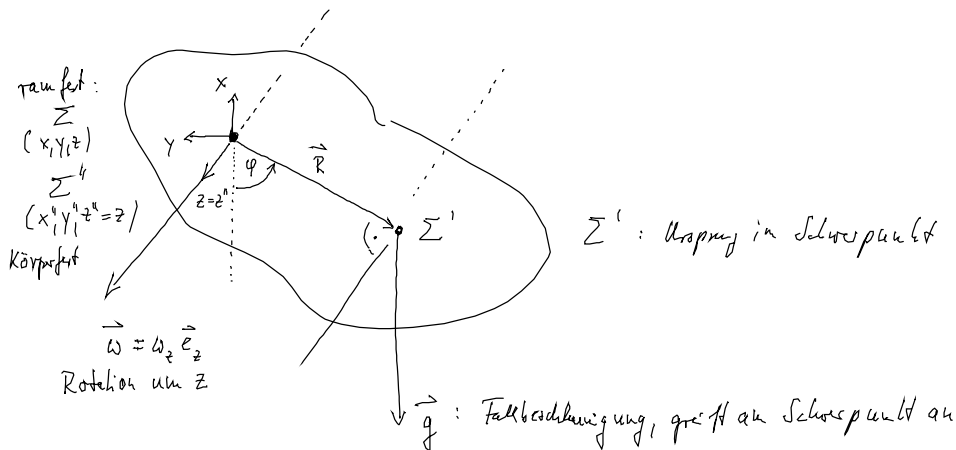


2.2. Dynamik starrer Körper, insbesondere Kreiseltheorie

2.2.1 Rotation um räumlich feste Achse unter Gravitation

- keine Translation
- Rotation eines SK um feste Achse $\vec{\omega}$, d.h. $\vec{\omega}$ hat fest Richtung, unter Einfluß Schwerkraft: physisches / physikalische Pendel



wolle Dynamik beschreiben, dazu $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$

über Σ : $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$

Def. Schwerpunkt.

Def. Kreuzprodukt

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M \vec{R} \times \vec{g} = -M g R \sin \varphi \vec{e}_z$$

\vec{f}_i : Gravitationskraft $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ (homogenes Feld)

$$\vec{L} = \sum_k \vec{e}_k L_k, \text{ über } \vec{L}'' \text{ bestimmen:}$$

$$L_k'' = \sum_e \theta_{ke}'' \omega_e'' = \left| \omega_e'' = \omega_e'' \delta_{ez} = \omega_e \delta_{ez} \right| = \theta_{kz}'' \omega_z'' = L_k$$

↑
im System Σ'' berechnet, Triebfedertor um feste Achse

Auswertung von $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$, kompakte Seite:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_x &= 0 \\ \dot{L}_y &= 0 \end{aligned} \right\} L_x, L_y \text{ sind Erhaltungsgrößen}$$

$$\dot{L}_z = M_2 \rightarrow \Theta_{zz}'' \dot{\omega}_z = -MRg \sin \varphi$$

$$\dot{\omega}_z = - \frac{MRg}{\Theta_{zz}''} \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \omega_z = \dot{\varphi}$$

$$\underbrace{\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l_{\text{eff}}} \sin \varphi}_{\text{Schwingung Fadenpendels}} \quad \underbrace{l_{\text{eff}} = \Theta_{zz}'' / RM}_{\text{effektive Länge ein Fadenpendels}}$$

Bemerkungen:

a) Sk rotiert um feste Achse unter Einfluß von $\vec{g} = \text{konstant}$
wie ein mathematisches Pendel, d.h. MP mit effektiver Pendellänge l_{eff}

b) $\vec{R} = 0 \hat{=}$ Achse im Schwerpunkt $\ddot{\varphi} = 0 \hat{=}$ freie Bewegung und $\vec{\omega} = \text{konst}$

c) Trägheitsmoment $\Theta_{zz}'' = \Theta_S + MR^2$ (Steiner) :

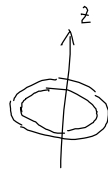
Wenn man Θ_S einmal berechnet hat so ist Θ_{zz}'' \forall Achse bekannt

2.2.2 Rotation um festen Punkt mit beweglicher Achse: Eulergleichungen

- Keine Translation, 1 Punkt wird fixiert, nicht notwendigerweise \vec{R} !

ein solches Objekt wird Kreisel genannt

symmetrische Kreisel $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$



2 äquivalente Hauptträgheitsachsen:

θ_1, θ_2 sind identisch (x, y)

Richtg. v. θ_3 : "Figurae cæli" (z)

Kugelkreisel $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$



3 äquivalente Hauptträgheitsachsen

dynamische Gleichungen: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ bzw die Eulergleichung $\dot{\Sigma}$ in Σ

$$\Sigma: \dot{\vec{L}} = \vec{M} \quad (\text{raumfest}) \quad \leftrightarrow \quad \Sigma': \underbrace{\dot{\vec{L}}'} + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}' \quad (\text{körperfest})$$

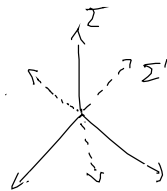
$\vec{\omega}'$ ist bereits in Σ' definiert,
es erscheint in den Gleichungen,

Idem: fange in Σ' an, bestimme \vec{L}' , bzw $\vec{\omega}'$ in Σ' und rechne dann auf Σ um

zur Erinnerung: möchte in Σ' Trägheitsknoten verwenden um $\vec{L}' = \sum_{k,k} \theta'_{kk} \omega'_k \vec{e}_k$ (*)

Σ' soll beliebig liegen und Ursprung im Drehpunkt, soll aber nicht unbedingt \vec{R} sein.

für $\vec{r}_0 = 0, \dot{\vec{r}}_0 = 0$ gilt auch Formel (*) und Σ' muß nicht in \vec{R} gewählt werden



$$\vec{r}_0 = 0, \quad \dot{\vec{r}}_0 = 0$$

$$\underbrace{\vec{L}' + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}'}_{\text{in Komponenten:}}$$

in Komponenten:

$$\dot{\vec{L}}' = \begin{pmatrix} A \dot{p} \\ B \dot{q} \\ C \dot{r} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}' \times \vec{L}' = \begin{vmatrix} \vec{e}'_x & \vec{e}'_y & \vec{e}'_z \\ p & q & r \\ A p & B q & C r \end{vmatrix}$$

Koordinat in körpersfestem System Σ' :

$$\vec{\omega}' = (p(t), q(t), r(t))$$

$$\vec{L}' = \hat{\Theta}' \vec{\omega}' : \text{Hauptachsenwahl} \quad \hat{\Theta}' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$A \dot{p} + q r (C - B) = M'_x$$

$$B \dot{q} + p r (A - C) = M'_y$$

$$C \dot{r} + p q (B - A) = M'_z$$

} Gleichung f. Komponenten von $\vec{\omega}' = (p, q, r)$,
beschreibt zeitliche Entwicklung unter äußeren
Drehmomente M'_i im System Σ'
 A, B, C sind konstante Beträge

Bemerkungen:

a) System von mittleren Gleichungen für $\vec{\omega}'$ heißt Eulergleichungen

b) nach dieser Lösung muß $\vec{\omega}'$ in Σ umgerechnet, dort steht Beobachter

c) Umrechnung erfolgt in die Eulerwinkel (nächstes Kapitel)

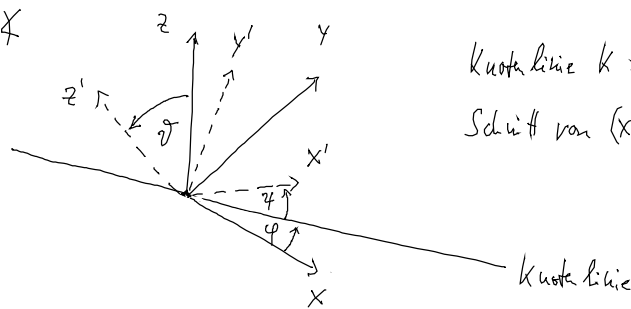
2.2.3. Umrechnung $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ f. punktfixierten Kreis: Eulerwinkel

3 Winkel die in Σ abgelesen werden können: $\vartheta, \varphi, \psi \hat{=}$ „Eulerwinkel“,

Ziel: Eulerwinkel zu definieren und durch p, q, r darzustellen,

denn p, q, r sind aus Eulergleichungen bekannt

Festlegung des φ



Nodal line k :

Schnitt von (x, y) -Ebene u. (x', y') -Ebene

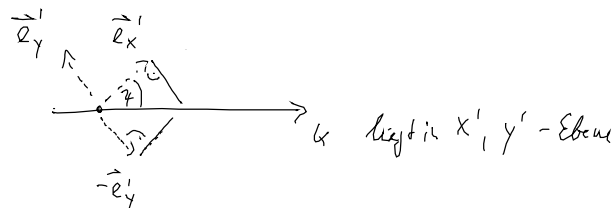
ϑ : \angle zwischen z und z'

φ : \angle zwischen k und x'

φ : \angle zwischen x und k

Darstellung v. Vektoren:

a) \vec{e}_k : sei Einheitsvektor entlang der Nodal line,
aufgespannt durch $\vec{e}_{x'}$ und $\vec{e}_{y'}$:



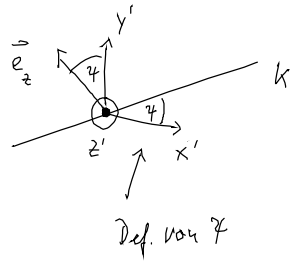
$$\vec{e}_k = \vec{e}_{x'} \cos \varphi - \underbrace{\vec{e}_{y'} \sin \varphi}_{\sin \varphi}$$

b) \vec{e}_z : fast analog. zu Kugelkoordinaten in Σ'

$$\vec{e}_z = \underbrace{\vec{e}_{x'} \sin \vartheta \sin \varphi}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\vec{e}_{y'} \sin \vartheta \cos \varphi}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\vec{e}_{z'} \cos \vartheta}_{\textcircled{1}}$$

$\textcircled{2}$ Projektion in x', y' Ebene $\textcircled{1}$ Projektion auf z' -Achse

$\textcircled{3}$ Nichtprojektion in der $x'-y'$ Ebene auf $\vec{e}_{x'}$ und $\vec{e}_{y'}$.



\vec{e}_z steht \perp auf \vec{e}_k , weil
 \vec{e}_k Schnitt von $x-y$ und $x'-y'$ Ebenen ist
 φ absteht zwischen y' und \vec{e}_z weil
 Winkelschenkel \vec{e}_z und k sowie x' und y'
 jeweils \perp aufeinander stehen

c) Zusammenhang zw. $\vec{\omega}' = (p, q, r)$ und $(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$:

zerlegen die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ in Änderung der Eulerwinkel:

$\vec{\omega}' / \dot{\vartheta}$, $\vec{\omega}' / \dot{\varphi}$, $\vec{\omega}' / \dot{\psi}$: alle Änd. sollen abh. v. Eulerwinkel
 aufgedreht werden

in $\dot{\vartheta}$ -Richtung: $\vec{\omega}' / \dot{\vartheta} = \frac{d\chi}{dt} \Big|_{\text{bzgl. } \dot{\vartheta}} = \dot{\vartheta} \vec{e}_k = \dot{\vartheta} (\vec{e}_{x'} \cos \varphi - \vec{e}_{y'} \sin \varphi)$
 Richtung \perp zur Änd. d. Winkel

in $\dot{\varphi}$ -Richtung: $\vec{\omega}' / \dot{\varphi} = \frac{d\chi}{dt} \Big|_{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$ (φ dreht zu x' -Achse hin)
 $= \dot{\varphi} (\sin \dot{\vartheta} \sin \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{e}_{y'} + \cos \dot{\vartheta} \vec{e}_{z'})$

in $\dot{\psi}$ -Richtung: $\vec{\omega}' / \dot{\psi} = \frac{d\chi}{dt} \Big|_{\psi} = \dot{\psi} \vec{e}_{z'}$ (ψ dreht zu x' -Achse hin)

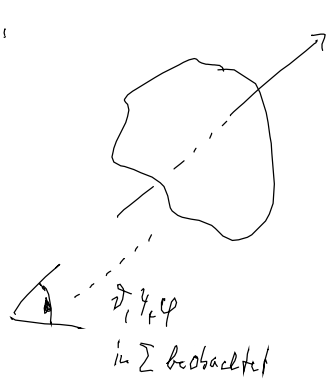
aufsummieren alle Terme:

x' Komponente von $\vec{\omega}'$: $p = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \dot{\vartheta} \sin \varphi$

y' - " - : $q = -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \dot{\vartheta} \cos \varphi$

z' - " - : $r = \dot{\psi} \cos \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}$

breicht ist:



$$\vec{\omega}^I = (p, q, r) \leftarrow \text{bekannt aus Eulergl.}$$

kon. feld umgedreht werden in

$$\vec{\omega}^I = \vec{\omega}^I(\vartheta, \varphi, \psi) \leftarrow \text{Eulerwinkel}$$

ϑ, φ, ψ : können an Σ beobachtet werden