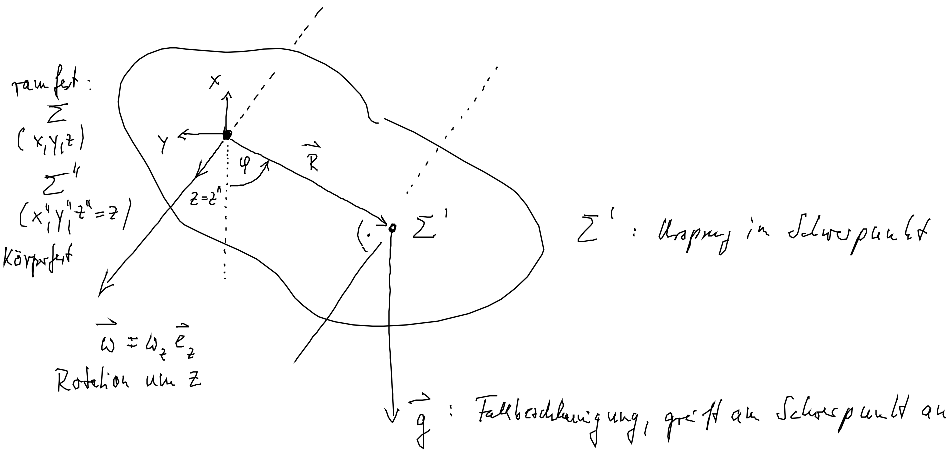
2.2. Dynamik starrer Körper, insbesondere Kreiseltheorie

2.2.1 Rotation um räumlich feste Achse unter Gravitation

- Keine Translation
- Rotation eines SK um feste Achse $\vec{\omega}$, d.h. $\vec{\omega}$ hat feste Richtung, unter Einfluß Schwerkraft: physisches / physikalisches Pendel



wolle Dynamik beschreiben, dazu $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

über Σ: $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$

Def. Kreuzprodukt

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \overbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}^{\text{Def. Schwerpkt.}} \times \vec{g} = M\vec{R} \times \vec{g} = -M g R \sin\varphi\, \vec{e}_z$$

$\vec{f}_i$: Gravitationskraft $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ (homogenes Feld)

$$\vec{L} = \sum_k \vec{e}_k L_k \,,$$ über $\vec{L}''$ bestimmen:

$$L''_k = \sum_l \Theta''_{kl}\, \omega''_l = \left| \omega''_l = \omega''_l \delta_{lz} = \omega_l \delta_{lz} \right| = \Theta''_{kz}\, \omega_z = L_k$$

im System Σ'' berechnet, Trägheitstensor um feste Achse

Auswertung von $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$, komponentenweise:

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}_x &= 0 \\ \dot{L}_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad L_x, L_y \text{ sind Erhaltungsgrößen}$$

$$\dot{L}_z = M_z \longrightarrow \theta''_{zz}\,\dot{\omega}_z = -MRg\sin\varphi$$

$$\dot{\omega}_z = -\frac{MRg}{\theta''_{zz}}\sin\varphi \quad \text{mit } \omega_z = \dot{\varphi}$$

$$\underbrace{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l_{eff}}\sin\varphi}_{\text{Gleichung Fadenpendel}} \qquad \underbrace{l_{eff} = \theta''_{zz}/RM}_{\text{effektive Länge eines Fadenpendels}}$$

Bemerkungen:

a) SK rotiert um feste Achse unter Einfluß von $\vec{g}$ = konstant wie ein mathematisches Pendel, d.h. MP mit effektiver Pendellänge l_{eff}

b) $\vec{R} = 0 \;\hat{=}\;$ Achse im Schwerpunkt $\;\ddot{\varphi} = 0 \;\hat{=}\;$ freie Bewegung mit $\vec{\omega}$ = konstant

c) Trägheitsmoment $\theta''_{zz} = \theta_S + MR^2$ (Steiner):

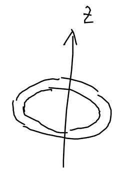
wenn man θ_S einmal berechnet hat so ist θ''_{zz} $\forall$ Achse bekannt

2.2.2. Rotation um festen Punkt mit beweglicher Achse: Eulergleichungen

- Keine Translation, 1 Punkt wird fixiert, nicht notwendigerweise $\vec{R}$!

ein solches Objekt wird Kreisel genannt

symmetrische Kreisel $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$



2 äquivalente Hauptträgheitsachsen: Θ_1, Θ_2 sind identisch (x, y)

Richtg. v. Θ_3: „Figurenachse" (z)

Kugelkreisel $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$

3 äquivalente Hauptträgheitsachsen

dynamische Gleichungen: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ bzw die entsprechenden $\sphericalangle$ in Σ

$$\Sigma: \dot{\vec{L}} = \vec{M} \; \text{(raumfest)} \longleftrightarrow \Sigma': \underbrace{\dot{\vec{L}}' + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}'}_{} \; \text{(körperfest)}$$

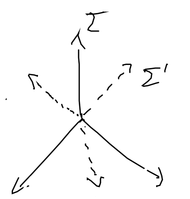
$\vec{\omega}'$ ist bereits in Σ' definiert,
es erscheint in den Gleichungen,

Idee: fange in Σ' an, berechne $\vec{L}'$, bzw $\vec{\omega}'$ in Σ' und rechne dann auf Σ um

zur Erinnerung: möchte in Σ' Trägheitstensor verwenden um $\vec{L}' = \sum_{l,k} \Theta'_{kl}\, \omega_l\, \vec{e}_k$ (*)

Σ' soll beliebig liegen mit Ursprung im Drehpunkt, soll aber nicht unbedingt $\vec{R}$ sein.

für $\vec{r}_0 = 0$, $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ gilt auch Formel (*) und Σ' muß nicht in $\vec{R}$ gewählt werden



$\vec{r}_0 = 0$, $\dot{\vec{r}}_0 = 0$

$$\underbrace{\dot{\vec{L}}' + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}'}$$,

Koordinate im körperfesten System Σ':

$\vec{\omega}' = (p(t), q(t), r(t))$

$\vec{L}' = \hat{\Theta}' \vec{\omega}'$: Hauptachsenwahl $\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$

in Komponenten:

$$\dot{\vec{L}}' = \begin{pmatrix} A\dot{p} \\ B\dot{q} \\ C\dot{r} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{\omega}' \times \vec{L}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_x' & \vec{e}_y' & \vec{e}_z' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} + qr(C-B) &= M_x' \\ B\dot{q} + pr(A-C) &= M_y' \\ C\dot{r} + pq(B-A) &= M_z' \end{aligned}\right\}$$

Gleichungen f. Komponenten von $\vec{\omega}' = (p, q, r)$, beschreibt Zeitentwicklung unter äußeren Drehmomenten M_i' im System Σ'

A, B, C sind konstante Bekannte

Bemerkungen:

a) System von nichtlinearen Gleichungen für $\vec{\omega}'$ heißt Eulergleichungen

b) nach deren Lösung muß $\vec{\omega}'$ in Σ umgerechnet, dort steht Beobachter

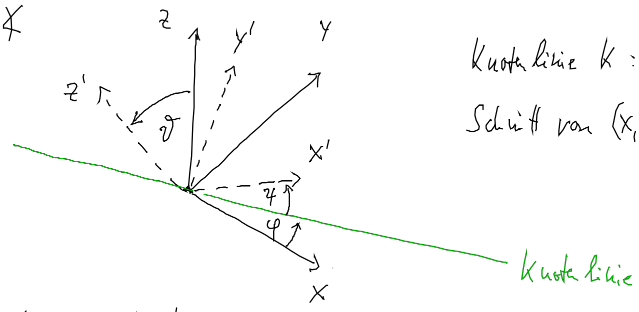
c) Umrechnung erfolgt in die Eulerwinkel (nächstes Kapitel)

2.2.3. Umrechnung $\Sigma' \to \Sigma$ f. punktfixierten Kreisel: Eulerwinkel

3 Winkel die in Σ abgelesen werden können: $\vartheta, \psi, \varphi \,\hat{=}\,$ „Eulerwinkel",

Ziel: Eulerwinkel zu definieren und durch p, q, r darzustellen, denn p, q, r sind aus Eulergleichungen bekannt

Festlegung der ∢



Knotenlinie K:

Schnitt von (x,y)-Ebene u. (x',y')-Ebene

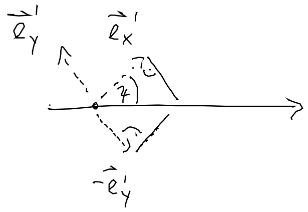
ϑ: ∢ zwischen z und z'

ψ: ∢ zwischen K und x'

φ: ∢ zwischen x und K

Darstellung v. Vektoren:

a) $\vec{e}_K$: sei Einheitsvektor entlang der Knotenlinie, aufgespannt durch $\vec{e}_x{}'$ und $\vec{e}_y{}'$:



K liegt in x', y'-Ebene

$$\vec{e}_K = \vec{e}_{x'} \cos\psi - \vec{e}_y{}' \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}_{\sin\psi}$$

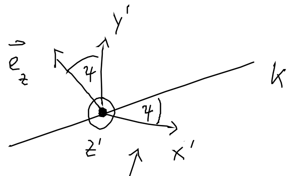
b) $\vec{e}_z$: fast analog zu Kugelkoordinaten in Σ'

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x{}' \underset{2}{\sin\vartheta}\, \underset{3}{\sin\psi} + \vec{e}_y{}' \underset{2}{\sin\vartheta}\, \underset{3}{\cos\psi} + \underbrace{\vec{e}_z{}' \cos\vartheta}_{1}$$

2 Projektion in x', y' Ebene

1 Projektion auf z'-Achse

3 Winkelprojektion in der x'-y' Ebene auf $\vec{e}_{x'}$ und $\vec{e}_{y'}$



Def. von ψ

$\vec{e}_z$ steht $\perp$ auf $\vec{e}_k$, weil $\vec{e}_k$ Schnitt von x-y und x'-y' Ebene ist

ψ entsteht zwischen y' und $\vec{e}_z$ weil Winkelschenkel $\vec{e}_z$ und k sowie x' und y' jeweils $\perp$ aufeinander stehen

c) Zusammenhang zwischen $\vec{\omega}' = (p, q, r)$ und $(\vartheta, \psi, \varphi)$:

zerlege die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ in Änderung der Eulerwinkel:

$\vec{\omega}'|_\vartheta$, $\vec{\omega}'|_\varphi$, $\vec{\omega}'|_\psi$: alle Änderungen sollen als Fkt. v. Eulerwinkel aufgeschrieben werden

in ϑ-Richtung:
$$\vec{\omega}'|_\vartheta = \frac{d\chi}{dt}\Big|_{\text{bzgl. } \vartheta} = \dot{\vartheta} \underbrace{\vec{e}_k}_{\text{Richtg } \perp \text{ zur Ändg. d. Winkel}} = \dot{\vartheta}\left(\vec{e}_{x'} \cos\psi - \vec{e}_{y'} \sin\psi\right)$$

in φ-Richtung:
$$\vec{\omega}'|_\varphi = \frac{d\chi}{dt}\Big|_\varphi = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z \quad (\varphi \text{ dreht um } x\text{-Achse herum})$$
$$= \dot{\varphi}\left(\sin\vartheta \sin\psi\, \vec{e}_{x'} + \sin\vartheta \cos\psi\, \vec{e}_{y'} + \cos\vartheta\, \vec{e}_{z'}\right)$$

in ψ-Richtg
$$\vec{\omega}'|_\psi = \frac{d\chi}{dt}\Big|_\psi = \dot{\psi}\, \vec{e}_{z'} \quad (\psi \text{ dreht um } x' \text{ Achse})$$

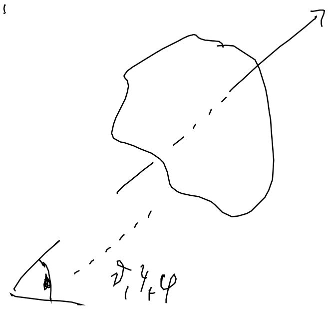
aufsammeln aller Terme:

x' Komponente von $\vec{\omega}'$: $p = \dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi$

y' —"— : $q = -\dot{\vartheta} \sin\psi + \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi$

z' —"— : $r = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}$

bereits ist:



$\vec{\omega}' = (p, q, r) \leftarrow$ bekannt aus Eulergl.

kann jetzt umgerechnet werden in

$\vec{\omega}' = \vec{\omega}'(\vartheta, \varphi, \psi) \leftarrow$ Eulerwinkel

ϑ, ψ, φ : können aus Σ beobachtet werden