

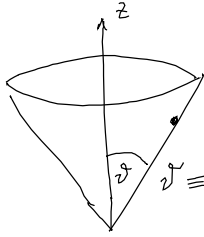
### 3.3. Angepasste Koordinaten: Lagrangegleichungen 2. Art

Ausgangspunkt analog 3.2.:  $r$  NB,  $3N$  Koordnaten  $\rightarrow$  FG  $f = 3N - r$

Lagrange 1. Art: NB über Zwangsbedingungen (3.2.)

jetzt Lagrange 2. Art: NB über Koordnaten die NB bereits enthalten (3.3.)

Beispiel



$\vartheta \equiv \alpha = \text{fest}$ , d.h. Dynamik in Kugelkoordinaten in gegeben durch

$$(\underbrace{r, \vartheta, \varphi}_{NB}) \rightarrow (\underbrace{r, \varphi}_{NB})$$

Frage: Wie lautet Eulers-Lagrangegleichungen unter NB?

ohne NB: 
$$\frac{\partial L}{\partial x_{ui}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}} = 0$$

mit NB:  $?$   $\rightarrow$  dann Einbau der NB in Hamiltonprinzip

Ziel:  $\underbrace{\{x_{ui}\}}_{3N} + \underbrace{NB}_r \rightarrow \underbrace{\{q_j\}}_{f = 3N - r}$

Anzahl:  $3N$   $r$   $f = 3N - r$

es muß Formulierung geben  $x_{ui} = x_{ui}(q_j)$ , NB:  $f_{\alpha}(x_{ui}) = 0$

daher bekannt 
$$dx_{ui} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} dq_j$$

Virtprinzip: 
$$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left( \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{ui}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}}}_{\neq 0} \right) \delta x_{ui}$$

nicht mehr linear unabhängig  $\leftarrow$

$$\delta S = 0 = \int dt \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial x_{ui}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}} \right) \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \int dt \left( \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial x_{ui}} \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j}}_{\frac{\partial L}{\partial q_j}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}} \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j}}_{?} \right) \delta q_j$$

?, dazu:  $\frac{dx_{ui}}{dt} = \sum_j \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt}$   $\left| \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right.$

$\dot{x}_{ui} \nearrow x_{ui}(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{\partial \dot{x}_{ui}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_j \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad , \text{ und } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j = \delta_{kj}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{ui}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_k} \rightarrow \text{einsetzen}$$

$$0 = \int dt \sum_{j=1}^f \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{=0} \delta q_j$$

unabhängig variierbar

Lagrange Gleichung 2. Art mit eingebauten NB:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$$

gültig für voneinander unabhängige  
Koordinaten  $\{q_j\}$ , d.h. NB in  $\{q_j\}$  integriert

Allgemeines Vorgehen bei mechanischen Problemen mit Lagrange 2. Art

1. Nebenbedingungen formulieren
2. Unabhängige Koordinaten finden  $\{X_{ni}\} \rightarrow \{q_j\}$   
 oft "generalisierte Koordinaten" genannt falls Mehrteilchen systeme  
 Bsp.: Relativ und Schwerpunktsbewegung
3.  $L$  in generalisierte Koordinaten  $\{q_j\}$  aufschreiben
4. Lagrangegleichungen 2. Art aufschreiben  
 und nach Erhaltungsgrößen suchen:  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow E_{\text{mech}} = \text{konstant}$   
 $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{konstant}$

Sicherlich generalisierte Impuls einführen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j \quad \text{"generalisierte Impuls" i.d.R. } \neq \text{Newton Impuls}$$

5. Lösen der Bewegungsgleichungen

Beispiel: Kegel als NB mit MP



1.  $r, \varphi, \vartheta \equiv \alpha = \text{fest}$
2.  $r, \varphi$  sind unabhängig = generalisierte Koordinaten
3.  $L = T - V = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - V(r) = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \underbrace{r^2 \dot{\varphi}^2}_{=0} + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - m g z$   
 $\cos \vartheta r = \cos \alpha r$   
 $L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right) - m g \cos \alpha r$

$$4. \quad \frac{\partial L}{\partial r} = \mu \left( r \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - g \cos \alpha \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \equiv p_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi} = \text{konstant} = p_\varphi \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

Achtg. Einheit!  $\rightarrow$  „generalisiertes Impuls“

nach Lagrange 2. Art:

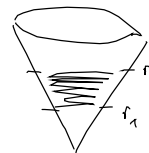
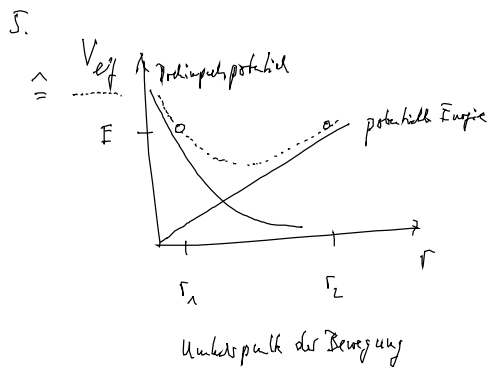
$$\downarrow \quad \ddot{r} = r \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - g \cos \alpha$$

gleichf. f.  $r(t)$ ,  $\dot{\varphi}$  gegeben durch Erhaltungsgröße:  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi} (p_\varphi = \text{konstant})$

$$\text{weil } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow E = \text{konstant} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

$$E = \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{r}^2}_{\text{kinet. Energie}} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \alpha}}_{\text{Drehimpulspotential}} + \underbrace{\mu g r \cos \alpha}_{\text{potentielle Energie}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_{\text{eff}}}$



$\hat{=}$  Bewegung zwischen den Umkehrpunkten

oder mit kleineren Gliedern  $\ddot{r} = \dots$  lösen, nachdem  $\dot{q}$  eliminiert ist.

Bemerkung: Lagrange gl. 2. Art sind in beliebigen Koordinatensystemen  $\{q_i\}$  gelöst.

#### 4. Hamilton formalismus

warum weitere Formulierung:

- Vorstufe zur Quantenmechanik, zu einem konjugierten Variablenpaar:  $x_i, p_i \rightarrow$  mit einem beliebig genau messbar

$\Downarrow$  Theorie in Lagekoordinaten und Impulsen, nicht aber in festgelegten

$$\text{zu formulieren } \underbrace{\{q_i, \dot{q}_i\}}_L \rightarrow \underbrace{\{q_i, p_i\}}_H$$

- Hamilton Gleichungen sind 1. Ordnung in Zeitableitung, aber doppelt so viele

#### 4.1. Hamilton Gleichungen

$$\text{Energie: } E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\text{Idee: } L \rightarrow E(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow H(q_i, p_i, t) \text{ mit } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

↑  
Hamiltonfunktion



$$\text{Legendretransformation, mit } \dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$$

Hamilton Gleichungen durch Differenzieren der Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad H = H(q_i, p_i, t)$$

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \Rightarrow 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = - \dot{p}_k$$

Lagrange 2. Art

$$1. \text{ Hamiltongleichg.} \quad \boxed{\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad H = H(q_i, p_i, t)$$

$$2. \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}$$

$$2. \text{ Hamiltongleichung} \quad \boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}} \quad H = H(q_i, p_i, t)$$

$$3. \text{ Energiebilanz (vor 2 Wochen)} \quad \boxed{\frac{d}{dt} H = - \frac{\partial L}{\partial t}}$$

Vorgehensweise bei Hamilton formalismus

1.  $L$  aufschreiben  $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$
2. Impulse berechnen  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \rightarrow p_k = p_k(q_i, \dot{q}_i, t) \Downarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(p_k, q_k, t)$
3.  $H$  berechnen:  $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \left. \begin{array}{l} \text{mit } p_k \\ \text{alle } \dot{q}_i \text{ eliminieren} \end{array} \right\} = H(q_i, p_i, t)$
4. Hamiltongleichungen berechnen  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

### Bemerkungen

- a) Die Hamiltongleichungen bilden System von Dgl. 1. Ordnung, aber es gibt 2f Stück (f. p und q jeweils) dagegen Lagrange f Stück und 2. Ordnung
- b) Lagre 1./2. Art / Hamilton sind äquivalent, technische Unterschiede
- c) Phasenraum: Raum der bei Bewegg. durch  $\{q_k, p_k\}$  aufgespannt wird

