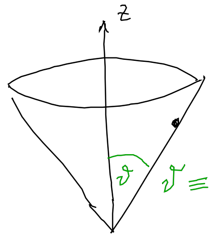
3.3. Angepasste Koordinaten: Lagrangegleichungen 2. Art

Ausgangspunkt analog 3.2.: r NB, $3N$ Koordinaten $\Rightarrow$ FG $f = 3N - r$

Lagrange 1. Art: NB über Zwangskräfte (3.2.)

jetzt Lagrange 2. Art: NB über Koordinaten die NB bereits enthalten (3.3.)

Beispiel



$\vartheta \equiv \alpha = \text{fest}$, d.h. Dynamik in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \xrightarrow[NB]{} (r, \varphi)$$

Frage: Wie lauten Euler-Lagrangegleichungen unter NB?

ohne NB: $$\frac{\partial L}{\partial x_{ni}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}} = 0$$

mit NB: ? $\longrightarrow$ dazu Einbau der NB in Hamiltonprinzip

Ziel: $$\underbrace{\{x_{ni}\}}_{3N} + \underbrace{NB}_{r} \longrightarrow \underbrace{\{q_j\}}_{f = 3N - r}$$

Anzahl: $3N$, r, $f = 3N - r$

es muß Formulierung geben $x_{ni} = x_{ni}(q_j)$, NB: $g_\alpha(x_{ni}) = 0$

daher bekannt $$dx_{ni} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} dq_j$$

Virt. prinzip: $$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{ni}^{3N} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x_{ni}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}} \right)}_{\neq 0} \underbrace{\delta x_{ni}}$$

$\leftarrow$ nicht mehr linear unabhängig

$$\delta S = 0 = \int dt \sum_{i,n}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{ni}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}} \right) \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{f} \int dt \left(\underbrace{\sum_{i,n}^{3N} \frac{\partial L}{\partial x_{ni}} \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j}}_{\frac{\partial L}{\partial q_j}} - \underbrace{\sum_{i,n}^{3N} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}} \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j}}_{?} \right) \delta q_j$$

?, dazu: $\underbrace{\frac{dx_{ni}}{dt}}_{\dot{x}_{ni}} = \sum_j \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$

$\uparrow$ $x_{ni}(q_j(t))$

$$\frac{\partial \dot{x}_{ni}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_j \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad , \text{mit } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j = \delta_{kj}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{ni}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_k} \rightarrow \text{einsetzen}$$

$$0 = \int dt \sum_{j=1}^{f} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=0} \Big) \underbrace{\delta q_j}_{\text{unabhängig variierbar}}$$

Lagrangegleichungen 2. Art mit eingebauten NB:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$$

gültig für voneinander unabhängige Koordinaten $\{q_j\}$, d.h. NB in $\{q_j\}$ integriert

Allgemeines Vorgehen bei mechanischen Problemen mit Lagrange 2. Art

1. Nebenbedingungen formulieren
2. unabhängige Koordinaten finden $\{x_{ni}\} \to \{q_j\}$

   oft „generalisierte Koordinaten" genannt falls Mehrteilchensysteme

   Bsp.: Relativ- und Schwerpunktsbewegung

3. L in generalisierten Koordinaten $\{q_j\}$ aufschreiben
4. Lagrangegleichungen 2. Art aufschreiben

   und nach Erhaltungsgrößen suchen: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \to$ Energie = Konstant

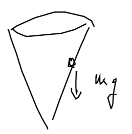
   $$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \curvearrowright \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Konstant}$$

   Sinnvoll generalisierte Impulse einzuführen:

   $$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L \equiv p_j$$ „generalisierte Impulse" i.a. $\neq$ Newtonimpuls

5. Lösen der Bewegungsgleichungen

Beispiel: Kegel als NB mit MP



1. $r, \varphi, \vartheta \equiv \alpha =$ fest
2. nur r, φ sind unabhängig = generalisierte Koordinaten
3. $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \underbrace{r^2\dot{\vartheta}^2}_{=0} + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - mg\underbrace{z}_{\cos\vartheta\, r = \cos\alpha\, r}$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2\right) - mg\cos\alpha\, r$$

4. $$\frac{\partial L}{\partial r} = m\left(r \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 - g\cos\alpha\right), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \equiv p_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \underbrace{m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi}_{} = \text{Konstant} = p_\varphi \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

Achtg. Einheit! → „generalisiertes Impuls"

nach Lagrange 2. Art:

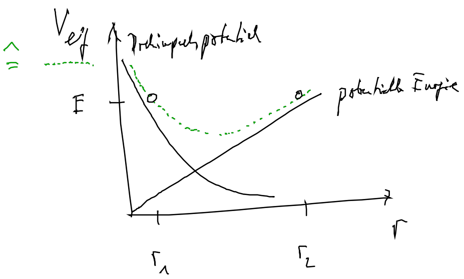
$$\Rightarrow \quad \ddot r = r \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 - g\cos\alpha$$

Gleichg. f. $r(t)$, $\dot\varphi$ gegeben durch Erhaltungsgröße : $\dot\varphi = \dot\varphi\,(p_\varphi = \text{Konstant})$

weil $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow E = \text{Konstant} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L(q_i, \dot q_i)$

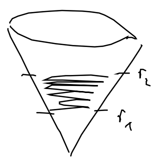
$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot r^2}_{\text{kinet. Energie}} + \underbrace{\underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha}}_{\text{Drehimpulspotential}} + \underbrace{mgr\cos\alpha}_{\text{potentielle Energie}}}_{V_{eff}}$$

5.



Umkehrpunkte der Bewegung

⇒



≙ Bewegung zwischen den Umkehrpunkten

oder mittels neuer Gleichung $\ddot{r} = \dots$ lösen, nachdem $\dot{\varphi}$ eliminiert ist.

Bemerkung: Lagrangegl. 2. Art sind in beliebigen Koordinatensystemen $\{q_i\}$ gültig.

4. Hamiltonformalismus

Warum weitere Formulierung:

- Vorstufe zur Quantentheorie, zu bilden konjugierte Variablenpaar : $x_i, p_j \to$ nicht simultan beliebig genau meßbar

  $\Rightarrow$ Theorie in Lagekoordinaten und Impulsen, nicht aber in Geschwindigkeiten zu formulieren $\underbrace{\{q_i, \dot{q}_i\}}_{L} \longrightarrow \underbrace{\{q_i, p_i\}}_{H}$

- Hamiltongleichungen sind 1. Ordnung in Zeitableitung, aber doppelt so viele

4.1. Hamiltongleichungen

Energie: $$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Idee: $$L \to E(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow H(q_i, p_i, t) \quad \text{mittels} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Hamiltonfunktion

Legendretransformation, mittels $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$

Hamiltongleichungen durch differenzieren der Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \underline{\dot{q}_i}, t), \quad H = H(q_i, p_i, t)$$

1. $$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \Rightarrow 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k$$

Lagrange 2. Art

1. Hamiltongleichg. $\boxed{\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$ $H = H(q_i, p_i, t)$

2. $$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}$$

2. Hamiltongleichung $\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}}$ $H = H(q_i, p_i, t)$

3. Energiebilanz (vor 2 Woch.) $\boxed{\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial L}{\partial t}}$

<u>Vorgehen bei Hamiltonformalismus</u>

1. L aufschreiben $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$

2. Impulse berechnen $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ $\rightarrow p_k = p_k(q_i, \dot{q}_i, t)$ $\Rightarrow$ $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_k, q_k, t)$

3. H berechnen: $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) =$ | mittels p_k alle $\dot{q}_i$ eliminieren | $= H(q_i, p_i, t)$

4. Hamiltongleichungen berechnen $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Bemerkungen

a) Die Hamiltongleichungen bilden System von Dgl. 1. Ordnung,
aber es gibt $2f$ Stück (f p und q jeweils)
dagegen Lagrange f Stück und 2. Ordnung

b) Lagrange 1. / 2. Art / Hamilton sind äquivalent, technische Unterschiede

c) Phasenraum: Raum der bei Bewegg. durch $\{q_k, p_k\}$ aufgespannt wird