2.2.4 Kräftefreier Kreisel

$\hat{=}$ Kreisel ohne externe Kraft $\rightsquigarrow$ $\vec{M} = 0 = \vec{M}'$

$\rightsquigarrow$ Eulergleichungen:

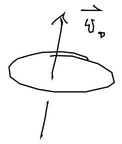
$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} + qr\,(C-B) &= 0 \\ B\dot{q} + pr\,(A-C) &= 0 \\ C\dot{r} + pq\,(B-A) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}\text{Dynamik von } \vec{\omega}' = (p, q, r) \\ \text{für } \vec{M} = \vec{M}' = 0\end{gathered}$$

stellt nichtlineares System von Dgl. dar: $\dot{p} = f(\underline{\underline{q \cdot r}})$

a) Kräftefreier Kreisel mit $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}$ fest in Σ und Σ'

Stationäre Lösung f. $\vec{\omega}'$ die fest im Körper steht:

$\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$



$\vec{\omega}_0$ = fest = konstant

$$\vec{\omega}_0 = (\underbrace{p_0, q_0, r_0}_{\text{Konstanten}})$$

i) Eulergleichungen:

$(C-B)\,q_0 r_0 = 0$, $(A-C)\,p_0 r_0 = 0$, $(B-A)\,p_0 q_0 = 0$, für $A \neq B \neq C$

nur eine der drei Komponente kann ungleich Null sein!

$\rightsquigarrow$ eine kräftefreie Rotation mit $\vec{\omega}'$ = konstant kann nur um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgen.

ii) Umrechnung in $\Sigma' \to \Sigma$

Euler winkel: $p = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi$

$q = -\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi$

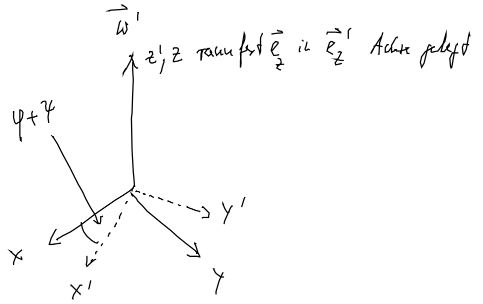
$r = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}$

z, z'-Achse identisch $\Rightarrow \vartheta = 0$

$\hookrightarrow 0 = 0, \; p_0 = 0$

$\rightarrow 0 = 0 \quad q_0 = 0$

$\rightarrow r_0 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \rightarrow \varphi + \psi = r_0 t$



$\Rightarrow$ lineare Zeitabhängigkeit von $\varphi + \psi$, um $\vec{\omega}_0 = \text{konstant} = \vec{\omega} = \vec{\omega}'$ zu halten

die gefundenen Lösungen heißen „Fixpunkte", „stationäre Punkte" $\dot{q} = \dot{p} = \dot{r} = 0$

iii) Stabilitätsanalyse in Nähe der Fixpunkte

Wie verhält sich eine kleine Störung $\vec{\omega}'(t) = \vec{\omega}_0 + \delta\vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta p(t) \\ \delta q(t) \\ \delta r(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{p} = \frac{(B-C)}{A}\, q r$$

$$\dot{q} = \frac{(C-A)}{B}\, p r$$

$$\dot{r} = \frac{(A-B)}{C}\, p q$$

Ansatz in Gleichungen komponentenweise einsetzen und Produkte kleiner Störungen $\delta p \cdot \delta q$ vernachlässigen

$$\delta\dot{p} = \overbrace{\frac{(B-C)}{A}}^{=\alpha_1} \cdot \left(\delta q\, r_0 + q_0\, \delta r\right) = \alpha_1 \cdot 0 \cdot \delta p + \alpha_1 r_0\, \delta q + \alpha_1 q_0\, \delta r$$

Verwendung von $\frac{(B-C)}{A} r_0 q_0 = 0$

$$\delta\dot{q} = \overbrace{\frac{(C-A)}{B}}^{=\alpha_2}\left(\delta p\, r_0 + p_0\,\delta r\right) = \alpha_2 \quad \ldots$$

$$\delta\dot{r} = \overbrace{\frac{(A-B)}{C}}^{=\alpha_3}\left(\delta p\, q_0 + p_0\,\delta q\right) = \alpha_3 \quad \ldots$$

$$\delta\dot{\vec{w}}' = \hat{M}\,\delta\vec{w}' \quad , \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 r_0 & \alpha_1 q_0 \\ \alpha_2 r_0 & 0 & \alpha_2 p_0 \\ \alpha_3 q_0 & \alpha_3 p_0 & 0 \end{pmatrix}$$

lineares Differentialgleichungssystem

Ansatz: $\delta\vec{w}' = \delta\vec{w}_0'\, e^{\lambda t}$

$$\lambda\,\delta\vec{w}_0' = \hat{M}\,\delta\vec{w}_0' \quad \hat{=} \text{ Eigenwertgleichung f. } \delta\vec{w}_0$$

$$\underbrace{\left(\hat{M} - \lambda\hat{1}\right)}\delta\vec{w}_0' = 0 \qquad \delta\vec{w} = \sum_n a_n\,\vec{u}_n\, e^{\lambda_n t} \leftarrow \text{Eigenwerte}$$

Anfangsbedingg. → a_n ↑ Eigenvektoren

bildet Koeffizientendeterminante $= 0$ f. nichttriviale Lösungen

wählen $\vec{w}_0' = (p_0, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \alpha_2 p_0 \\ 0 & \alpha_3 p_0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} = 0$$

Eigenwerte: $\quad -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{B\cdot C}\,p_0^2\right) = 0$

$\exists$ 3 Eigenwerte, 3 Eigenvektoren:

1 Fall: $\lambda_1 = 0 \quad \hat{M}\vec{u}_1 = 0\,\vec{u}_1 \quad$ mit $\vec{u}_1 = (1,0,0)$

Test durch Einsetzen

2/3 Fall: $\lambda_{2/3} = \pm p_0 \left(\frac{(C-A)\cdot(A-B)}{CB} \right)^{1/2}$ mit $\vec{u}_{2/3} \perp$ auf $\vec{u}_1$

$\vec{u}_1$ beschreibt klein Verschiebung von $\vec{\omega}_0$ mit $p_0 \to p_0 + \delta p_0 e^{0\cdot t}$

wegen verschwinden Zeitdynamik irrelevant

$\vec{u}_{2/3}$ wirkt als Störung $\perp$ zur Rotationsrichtg. $\vec{\omega}_0{}' = (p_0, 0, 0)$

die entsprechende Zeitdynamik $\lambda \neq 0$ ist nichttrivial:

$r_0 \to r_0 + \delta r_0 e^{\lambda_3 t} \qquad q_0 \to q_0 + \delta q_0 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda \lessgtr 0$ bestimmt die Stabilität

Fall 1) wenn Ausdruck unter Wurzel in $\lambda_{2/3}$ positiv ist so führt Störung f. q_0 zu Instabilität $\lambda_2 > 0$, für r_0 zu Stabilität $\lambda_3 < 0$

insgesamt $\to$ instabil

Wann ist Ausdruck unter Wurzel positiv?

$(C-A)(A-B) \overset{!}{>} 0$

wenn $C > A > B$ oder $C < A < B$

$\Longrightarrow$ wenn $p_0 \neq 0$ als Rotationsachse und A das mittlere Trägheitsmoment ist, so ist die Rotation instabil

Fall 2) Wenn unter Wurzel der Ausdruck negativ wird, so wird λ imaginär und es entstehen kleine Oszillationen die aber beschränkt sind

Wann ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ?

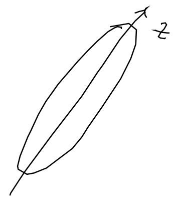
$(C-A)(A-B) < 0$

wenn $A > C, B$ oder $C, B > A$

$\Longrightarrow$ wenn $p_0 \neq 0$ als Rotationsachse und A das kleinste oder das größte Trägheitsmoment ist, so ist die Rotation stabil

b) Kräftefreier, symmetrischer Kreisel mit $\vec{\omega}'(t)$

symmetrisch $A = B \equiv A$, bedeutet $z' \hat{=}$ Figurenachse



$\vec{\omega}'(t) = (p(t), q(t), r(t)) \neq$ Konstant

Was bedeutet dies für $\vec{\omega}(t)$ in Σ beobachtet

i) Eulergleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p} - (A-C)qr &= 0 \\ A\dot{q} + (A-C)pr &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{A}{2}\frac{d}{dt}p^2 + \frac{A}{2}\frac{d}{dt}q^2 = 0$$

$\Rightarrow p^2(t) + q^2(t) =$ Konstant

an: obere Gleichg. mit p, untere mit q multiplizieren, addieren

$$C\dot{r} = 0 \quad \Big\}\quad r = r_0 = \text{Konstant}$$

$\curvearrowright$ $|\vec{\omega}'|^2 = \text{Konstante}$, denn $r_0^2 + p^2(t) + q^2(t) = \text{Konstant}$

$$\omega_z' = \text{Konstante} = r_0$$

aufgrund von $r = r_0$ stellen die ersten beiden Gleichg. ein lineares Dgl. System dar, lösbar, indem man zeitlich ableitet, z.B. 1. Gl.:

$$A\ddot{p} - (A-C)\,\dot{q}\,r_0 = A\ddot{p} + \frac{(A-C)^2}{A}\,p\,r_0^2 = 0$$

$\dot{q}$ einsetzen (2. Gl.)

stellt Oszillatorgl. f. $p(t)$ dar:

$$\ddot{p}(t) + \kappa^2 p(t) = 0 \quad \text{mit } \kappa^2 = \left(\frac{A-C}{A}\right)^2 r_0^2$$

analog: $\ddot{q}(t) + \kappa^2 q(t) = 0$ — " —

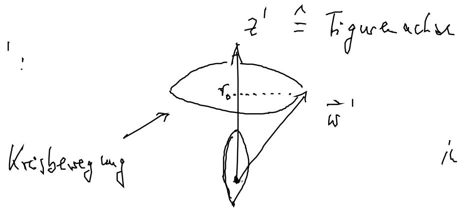
mgl. Lösung werden mit AB durch cos/sin Funktion aufgebaut

Wahl der AB $p(0) = 0$, $q(0) = q_0 = \text{endlich}$

$$p(t) = q_0 \sin(\kappa t), \quad q(t) = q_0 \cos(\kappa t)$$

$$\curvearrowright \vec{\omega}' = (\underbrace{q_0 \sin\kappa t,\ q_0 \cos\kappa t}_{\text{Kreisbewegung in } x', y'},\ r_0) \quad \text{mit } |\vec{\omega}'|^2 = q_0^2 + r_0^2$$

Interpretation in Σ':



in Σ'!

Es erfolgt eine Kreisbewegung von $\vec{\omega}\,'$ um die Figurenachse,
der entstehende Kegel heißt „Polkegel“.

ii) Umrechnung $\Sigma' \to \Sigma$

einsetzen in Zshg. von $\vec{\omega}\,'$ und Eulerwinkeln

$$q_0 \sin(\kappa t) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi$$

$$q_0 \cos(\kappa t) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \cos\psi$$

$$r_0 = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}$$

Zusätzlich bekannt $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ in Σ $\Downarrow$ $\vec{L} = \vec{L}_0$ = konstant

natürliche Wahl $\vec{L} = L_0 \vec{e}_z$ in Σ, damit ist z-Achse in Σ festgelegt

müssen bereits wie $\vec{e}_z$ über Eulerwinkel festgelegt ist

$$L_x' = L_0 \sin\vartheta \sin\psi = A p = A(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi)$$

$$L_y' = L_0 \sin\vartheta \cos\psi = A q = A(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \cos\psi)$$

$$L_z' = L_0 \cos\vartheta = C r = C r_0$$

Zshg. $\vec{L}\,'$ mit $\vec{\omega}\,'$ im Σ'

Auswertung:

• Vergleich 2. und 4. Spalte in 3. und 2. Zeile

(1) $\vartheta = \vartheta_0 = \text{konstant}$ (2) $\dot{\varphi} = \frac{L_0}{A} \rightarrow \varphi(t) = \frac{L_0}{A} t + \varphi_0$

• Vergleich 3. und 2. Spalte in 1. und 2. Zeile

$A q_0 \sin \kappa t = L_0 \sin \vartheta_0 \sin \psi \rightarrow$ (3) $\psi(t) = \kappa t$

$A q_0 \cos \kappa t = L_0 \sin \vartheta_0 \cos \psi \rightarrow$ (4) $A q_0 = L_0 \sin \vartheta_0$ (∗2)

• Vergleich 2. und 3. Spalte in 3. Zeile: (5) $L_0 \cos \vartheta_0 = C r_0$ (∗1)

$\Rightarrow$ insgesamt $\left\{ \text{Endergebnis:} \right.$

$$\psi = \kappa t \quad \text{mit} \quad \kappa = \kappa(A, C, r_0)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi = \frac{q_0 t}{\sin \vartheta_0} + \varphi_0$$

Ziel: alle Ergebnisse als Funktion der AB und Geometrie aufzuschreiben: A, C, r_0, q_0

ϑ_0 durch (∗1) und (∗2) bestimmt: $\tan \vartheta_0 = \frac{A}{C} \frac{q_0}{r_0}$

damit sind ψ, φ, ϑ durch Geometrie und AB bestimmt.