

## 2.2.4. Kräftefreier Kreisel

$\hat{=}$  Kreisel ohne externe Kraft  $\Downarrow \vec{M} = 0 = \vec{M}'$

$\Downarrow$  Eulergleichungen:

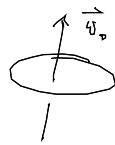
$$\left. \begin{aligned} A \dot{p} + q r (C - B) &= 0 \\ B \dot{q} + p r (A - C) &= 0 \\ C \dot{r} + p q (B - A) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Dynamik um } \vec{\omega}' = (p, q, r) \\ &\text{f. } \vec{M} = \vec{M}' = 0 \end{aligned}$$

stellt nichtlineares System von Dgl. dar:  $\dot{p} = f(\underline{q}, r)$

a) Kräftefreier Kreisel mit  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}$  fest in  $\Sigma$  und  $\Sigma'$

Stationäre Lösung f.  $\vec{\omega}'$  die fest im Körper steht:

$$\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$$



$$\vec{\omega}_0 = \underbrace{(p_0, q_0, r_0)}_{\text{Konstante}}$$

i) Eulergleichungen:

$$(C - B) q_0 r_0 = 0, \quad (A - C) p_0 r_0 = 0, \quad (B - A) p_0 q_0 = 0, \quad \text{für } A + B + C$$

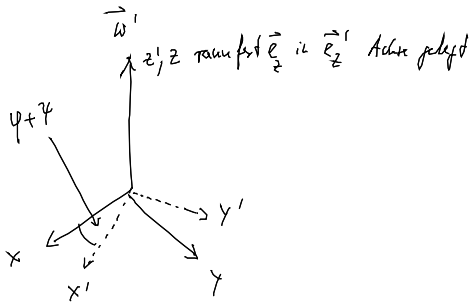
Nur eine der drei Komponenten kann ungleich Null sein!

$\Downarrow$  Eine kräftefreie Rotation mit  $\vec{\omega}' = \text{konstant}$  kann nur um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgen.

ii) Umrechnung in  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$

Eulerwinkel:

$$\begin{cases} p = \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ q = -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ r = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{cases} \left. \begin{array}{l} z, z' \text{-Achse identisch } \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0 \\ \hookrightarrow 0 = 0, p_0 = 0 \\ \rightarrow 0 = 0 \quad q_0 = 0 \\ \rightarrow r_0 = \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \rightarrow \varphi + \varphi = r_0 t \end{array} \right\}$$



$\hookrightarrow$  linear Zeitabhängigkeit von  $\varphi + \varphi$ ,  
 um  $\vec{\omega}_0 = \text{konstant} = \vec{\omega} = \vec{\omega}'$  zu halten

die gefunden Lösungen heißen Fixpunkte, "stationärer Punkt"  $\dot{\varphi} = \dot{p} = \dot{r} = 0$

### iii) Stabilitätsanalyse in Nähe der Fixpunkte

Wie verhält sich eine kleine Störung  $\vec{\omega}'(t) = \vec{\omega}_0 + \delta \vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta p(t) \\ \delta q(t) \\ \delta r(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{p} = \frac{(B-C)}{A} q r$$

$$\dot{q} = \frac{(C-A)}{B} p r$$

$$\dot{r} = \frac{(A-B)}{C} p q$$

Auswahl in gleichen Komponente Güte einzeln  
 und Produkte kleiner Störungen  $\delta p \cdot \delta q$  vernachlässigen

$$\dot{\delta p} = \frac{(B-C)}{A} \stackrel{= \alpha_1}{\cdot} (\delta q r_0 + q_0 \delta r) = \alpha_1 \cdot 0 \cdot \delta p + \alpha_1 r_0 \delta q + \alpha_1 q_0 \delta r$$

$\nearrow$   
 Verwendung von  $\frac{(B-C)}{A} r_0 q_0 = 0$

$$\dot{\delta q} = \frac{(C-A)}{B} \stackrel{= \kappa_2}{\left( \delta p r_0 + p_0 \delta r \right)} = \kappa_2 \dots$$

$$\dot{\delta r} = \frac{(A-B)}{C} \stackrel{= \kappa_3}{\left( \delta p q_0 + p_0 \delta q \right)} = \kappa_3 \dots$$

$$\dot{\delta \vec{w}}' = \hat{M} \delta \vec{w}' \quad , \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 r_0 & \kappa_1 q_0 \\ \kappa_2 r_0 & 0 & \kappa_2 p_0 \\ \kappa_3 q_0 & \kappa_3 p_0 & 0 \end{pmatrix}$$

lineares Differentialgleichungssystem

Auswahl:  $\delta \vec{w}' = \delta \vec{w}_0' e^{\lambda t}$

$$\lambda \delta \vec{w}_0' = \hat{M} \delta \vec{w}_0' \quad \hat{=} \text{Eigenwertgleichung f. } \delta \vec{w}_0'$$

$$\underbrace{(\hat{M} - \lambda \hat{1})}_{\text{Anfangsbedg.}} \delta \vec{w}_0' = 0 \quad \delta \vec{w} = \sum_n a_n \underbrace{\vec{u}_n}_{\text{Eigenvektoren}} e^{\lambda_n t} \quad \leftarrow \text{Eigenwerte}$$

bildet Koeffizienten determinante = 0 f. nichttriviale Lösungen

wählen  $\vec{w}_0' = (p_0, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \kappa_2 p_0 \\ 0 & \kappa_3 p_0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Eigenwerte: } -\lambda \left( \lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{B \cdot C} p_0^2 \right) = 0$$

3 Eigenwerte, 3 Eigenvektoren:

$$1. \text{ Fall: } \lambda_1 = 0 \quad \vec{M} \vec{u}_1 = 0 \vec{u}_1 \quad \text{mit } \vec{u}_1 = (1, 0, 0)$$

Jetzt damit einsetzen

$$2/3. \text{ Fall: } \lambda_{2/3} = \pm p_0 \left( \frac{(C-A) \cdot (A-B)}{CB} \right)^{1/2} \quad \text{mit } \vec{u}_{2/3} \perp \text{ auf } \vec{u}_1$$

$\vec{u}_1$  beschreibt kleine Verschiebung von  $\vec{\omega}_0$  mit  $p_0 \rightarrow p_0 + \delta p_0 e^{0 \cdot t}$

wegen verschiedenen Zeitdykanal irrelevant

$\vec{u}_{2/3}$  wirkt als Störung  $\perp$  zur Rotationsmitgl.  $\vec{\omega}_0' = (p_0, 0, 0)$

die entsprechenden Zeitdykanäle  $\lambda \neq 0$  ist unabhängig:

$$r_0 \rightarrow r_0 + \delta r_0 e^{\lambda_3 t} \quad q_0 \rightarrow q_0 + \delta q_0 e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda \leq 0$  bestimmt die Stabilität

Fall 1) wenn Ausdruck unter Wurzel in  $\lambda_{2/3}$  positiv ist so

führt Störung f.  $q_0$  zu Instabilität  $\lambda_2 > 0$ , für  $r_0$  zu Stabilität  $\lambda_3 < 0$

insgesamt  $\rightarrow$  instabil

Wann ist Ausdruck unter Wurzel positiv?

$$(C-A)/(A-B) > 0$$

wenn  $C > A > B$  oder  $C < A < B$

$\Rightarrow$  wenn  $p_0 \neq 0$  als Rotationsachse und  $A$  das mittlere Trägheitsmoment ist, so ist die Rotation instabil

Fall 2/ Wenn unter Wurzel der Ausdruck negativ wird, so wird  $\lambda$  imaginär und es entstehen kleine Oszillationen die aber beschränkt sind

Wann ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ?

$$(C-A)(A-B) < 0$$

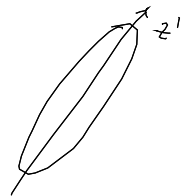
wenn  $A > C, B$  oder  $C, B > A$

$\Rightarrow$  wenn  $p_0 \neq 0$  als Rotationsachse und  $A$  das kleinste oder das größte Trägheitsmoment ist, so ist die Rotation stabil

b) Kräfte freier, symmetrischer Kreisel um  $\vec{\omega}^r(t)$

symmetrisch  $A = B \equiv A$ , bedeutet  $z' \hat{=} \text{Figura axis}$

$$\vec{\omega}^r(t) = (p(t), q(t), r(t)) \neq \text{konstant}$$



Was bedeutet dies für  $\vec{\omega}(t)$  in  $\Sigma$  beobachtet

i/ Eulergleichungen

$$\left. \begin{aligned} A \dot{p} - (A-C)qr &= 0 \\ A \dot{q} + (A-C)pr &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{A}{2} \frac{d}{dt} p^2 + \frac{A}{2} \frac{d}{dt} q^2 = 0$$

$$\Downarrow p^2(t) + q^2(t) = \text{konstant}$$

anz: Obere Gleichg.  
mit  $p$ , untere mit  $q$   
multiplizieren, addieren

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} r = r_0 = \text{Konstant}$$

$$\Downarrow |\vec{\omega}'|^2 = \text{Konstante}, \text{ denn } r_0^2 + p^2(t) + q^2(t) = \text{Konstant}$$

$$\omega_z' = \text{Konstante} = r_0$$

aufgrund von  $r = r_0$  stelle die erste beide Gleichg. ein lineares Dgl-System dar,  
lösbar, indem man zeitlich ableitet, z.B. 1. Gl.:

$$A \ddot{p} - (A-C) \dot{q} r_0 = A \ddot{p} + \frac{(A-C)^2}{A} p r_0^2 = 0$$

↑  
q einsetzen (2. Gl.)

stellt Ds zirkulargl. f.  $p(t)$  dar:

$$\ddot{p}(t) + \kappa^2 p(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = \left( \frac{A-C}{A} \right)^2 r_0^2$$

$$\text{analog: } \ddot{q}(t) + \kappa^2 q(t) = 0 \quad - \text{ " } -$$

mo gl. Lösung werde mit AB durch cos/sin Funktionen aufgebaut

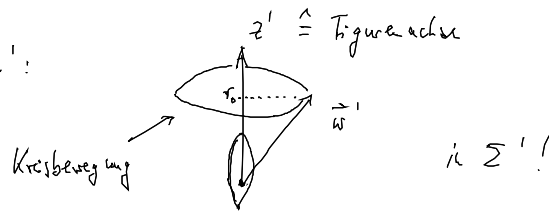
Wahl der AB  $p(0) = 0$ ,  $q(0) = q_0 = \text{endlich}$

$$p(t) = q_0 \sin(\kappa t), \quad q(t) = q_0 \cos(\kappa t)$$

$$\Downarrow \vec{\omega}' = (q_0 \sin \kappa t, q_0 \cos \kappa t, r_0) \quad \text{mit} \quad |\vec{\omega}'|^2 = q_0^2 + r_0^2$$

Kreisbewegung in  $x'y'$

Interpretation in  $\Sigma'$ :



Es erfolgt eine Kreisbewegung von  $\vec{w}'$  um die Figurenachsen, das entsteht der Kegel 'Köpf' & 'Poßkegel'.

ii) Umrechnung  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$

Einsetzen in Zshg. von  $\vec{w}'$  und Eulerwinkel

$$g_0 \sin(\kappa t) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma$$

$$g_0 \cos(\kappa t) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \gamma - \dot{\vartheta} \sin \gamma$$

$$r_0 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\gamma}$$

Zusätzlich bekannt  $\dot{L} = \vec{M}$  in  $\Sigma \quad \downarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_0 = \text{konstant}$

kontinuierlich Wahl  $\vec{L} = L_0 \hat{e}_z$  in  $\Sigma$ , dann ist  $z$ -Achse in  $\Sigma$  festgelegt

wissen bereits wie  $\vec{e}_z$  über Eulerwinkel festgelegt ist

$$L_x' = L_0 \sin \vartheta \sin \gamma = A p = A (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \gamma + \dot{\gamma} \cos \gamma)$$

$$L_y' = L_0 \sin \vartheta \cos \gamma = A q = A (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \gamma)$$

$$L_z' = L_0 \cos \vartheta = C r = C r_0$$

↑  
Zshg.  $\vec{L}'$  und  $\vec{v}'$  in  $\Sigma'$

Auswertung:

- Vergleich 2. und 4. Spalte in 3. und 2. Zeile

$$(1) \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \text{konstant} \quad (2) \quad \dot{\varphi} = \frac{L_0}{A} \rightarrow \varphi(t) = \frac{L_0}{A} t + \varphi_0$$

- Vergleich 3. und 2. Spalte in 1. und 2. Zeile

$$A q_0 \sin \kappa t = L_0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi \rightarrow (3) \quad \varphi(t) = \kappa t$$

$$A q_0 \cos \kappa t = L_0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi \rightarrow (4) \quad A q_0 = L_0 \sin \vartheta_0 \quad (*2)$$

- Vergleich 2. und 3. Spalte in 3. Zeile:  $(5) \quad L_0 \cos \vartheta_0 = \langle r_0 \quad (*1)$

↓ insgesamt f. Eulerwinkel:

$$\varphi = \kappa t \quad \text{mit } \kappa = \kappa(A, C, r_0)$$

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi = \frac{\dot{\vartheta}_0 t}{\sin \vartheta_0} + \varphi_0$$

Ziel: alle Ergebnisse als Funktion der AB und Geometrie aufzuschreiben:  $A, C, r_0, \dot{\vartheta}_0$

$$\dot{\vartheta}_0 \text{ aus } (*1) \text{ und } (*2) \text{ bestimmt: } \dot{\vartheta}_0 = \frac{A}{C} \frac{q_0}{r_0}$$

damit sind  $\varphi, \vartheta$  durch Geometrie und AB bestimmt.