## 3.2.2. Zeitartige Komponente $\alpha = 0$

$$\frac{d}{d\tau} p^0(\tau) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} p^0(t) = \gamma(t)\frac{d}{dt}\underbrace{\left(mc\gamma(t)\right)}_{p^0(t)} = mc\left(\gamma^3(t)\frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2}\right) \underset{\text{Behauptg. ....}}{\overset{!}{=}} \frac{\vec{f}_N\cdot\vec{v}}{c}$$

dazu:

letzte VL

$$\frac{\vec{f}_N\cdot\vec{v}}{c\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{m}{c\gamma}\left(\gamma\dot{v}_\alpha + \gamma^3\frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,v^\alpha\right)\cdot v^\alpha$$

muß identisch sein

$$= \frac{m}{c}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\left(1+\gamma^2\frac{1}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \text{ einsetzen}$$

$$\frac{\vec{f}_N\cdot\vec{v}}{c\gamma} = \frac{m}{c}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,\gamma^2 \longrightarrow \frac{\vec{f}_N\cdot\vec{v}}{c} = \frac{m}{c}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,\gamma^3$$

insgesamt: $\frac{d}{dt}p_0 = \frac{\vec{f}_N\cdot\vec{v}}{c} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(mc^2\gamma(t)\right) = \vec{f}_N\cdot\vec{v}}$

$\vec{f}_N\cdot\vec{v} \mathrel{\hat{=}}$ Leistung, d.h. ist dies eine Energiebilanz

$$\frac{d}{dt}E = \vec{f}_N\cdot\vec{v} \quad \text{und} \quad \boxed{E = mc^2\gamma(t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_{rel}(t)\,c^2}$$

## 4. Zusammenfassung (bisher)

a) relativistische Formulierg. d. Bewegungsproblems:

$$\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t)\,\dot{\vec{r}}(t)\right) = \vec{f}_N$$ Analogie zu Newtongl. ($v \ll c$, $\gamma \to 1$)

Bsp.: $\vec{f}_N$ = konstant (Kapitel I), zeigt c als maximale Geschwindigkeit

b) relativistische Energie $E = m_{rel}(t)\,c^2$, $m_{rel}(t) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- Äquivalenz zw. Energie und Masse :

(2× El-Masse)

$\Delta E \hat{=} \Delta m_{rel}$ , Beispiel Massendefekt, extrem Bsp.: Annihilation von positron / elektron

führt zu $\gamma$ - Quante (masselos)

betrifft sowohl „Ruheenergie" als auch „Bewegungsenergie" $(v \neq 0)$

- geringe Geschwindigkeit $v \ll c$ : $E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{Newton kint. Energie}} + \cdots$

Newton: Energieskala kann um Konstante verschoben werden, Einstein: Konstante fest $mc^2$.

c) Energie-Impuls-Beziehung: Newton : $E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = / p = mv / = \frac{p^2}{2m}$

$E_{kin}(p) = \frac{p^2}{2m}$ (Teilchen)

$E_{Licht}(p) \approx p$

relativistisch : $p^\alpha = \underbrace{(mc\gamma, m v_i \gamma)}\; = \underbrace{\left(\frac{E}{c}, p_i\right)}$ $i = 1,2,3$

berechne : $\sum_\alpha p_\alpha p^\alpha = \underbrace{m^2 c^2 \gamma^2 - m^2 v^2 \gamma^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2}$

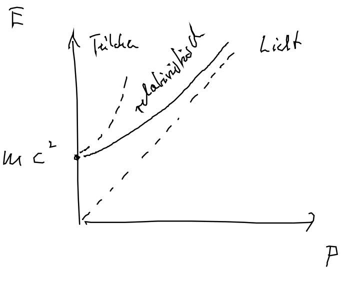
umstellen nach $E = E(p)$, dann $\gamma$ einsetzen

$$\boxed{E(p) = \left(m^2 c^4 + c^2 p^2\right)^{1/2}}$$

relativistische Energie-Impuls Relation

f. klein $p$ : $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ „teilchenartig"

f. große $p$ : $E = cp$ „lichtartig"




Interpolation zw. Teilchen / Welle

## 5. Einsteinsches Äquivalenzprinzip

Vorbetrachtung: haben Newton gl. f. $\vec{r}(t)$ modifiziert $\frac{d}{dt}(m_{rel} \dot{\vec{r}}) = \vec{f}_N$

Gravitation: $\vec{f}_N^{\,grav} = \vec{\nabla} \dfrac{G m M}{|\vec{r}(t) - \vec{R}|}$

$\vec{R}$: Körper mit Masse $M$, macht Gravitationswirkung auf $\vec{r}(t)$

Lorentzkraft: $\vec{f}_N^{\,L} = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right)$

$\vec{E}, \vec{B}$: Lorentz invariante em. Feld, $q$ - Ladung

nicht sinnvoll, weil: $\vec{R} \to \vec{R}(t)$

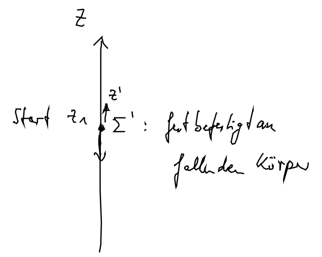
führt zu einer „instantanen" Wirkung auf $\vec{r}(t)$

↯ mit $c$ als maximaler Geschwindigkeit

diese Kraft ist sinnvoll definiert

Versuch: $$\frac{d^2 x^\alpha(\tau)}{d\tau^2} = g^\alpha(x^\beta)$$ Ansatz f. $g^\alpha$ (Gravitationskraft / Feld)

Gedankenexperiment (Einstein): freier Fall in Erdnähe




$\Sigma$: $\ddot{z} = -g$, $z = z_1 - g\dfrac{t^2}{2}$

$\Sigma'$: Ursprung des Systems $z_0 \;\hat{=}\; z(t)$

$z \to z(t) = z_0(t) + z'(t)$, zweimal differenzieren

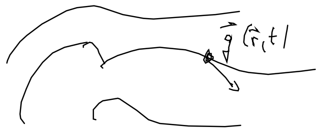
$$\ddot{z} = \ddot{z}_0 + \ddot{z}' \longrightarrow -g = -g + \ddot{z}' \longrightarrow \ddot{z}' = 0$$

Das Gravitationsfeld ist wegtransformiert durch Wahl von $\Sigma'$.

Scheinkraft im beschleunigten System hebt Gravitation weg.

Idee v. Einstein „Äquivalenzprinzip":

In jedem Raum-Zeit-Punkt läßt sich ein lokales „frei fallendes" $\Sigma'$ finden, so daß in $\Sigma'$ die Naturgesetze die Form wie im nicht beschleunigten System $\Sigma$ bei Abwesenheit von Gravitation hätten. Insbesondere gilt in $\Sigma'$ die spezielle RT.




wird durch $\Sigma'(\vec r,t)$ beseitigt

Koordinate in $\Sigma$: $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x_\alpha = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

kontravariant kovariant

Koordinate in $\Sigma'$: $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\xi_\alpha = (\xi^0, -\xi^1, -\xi^2, -\xi^3)$

in $\Sigma'$ gilt SRT:

$$\underset{\text{Abstand}}{ds^2} = \sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta} \, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \text{ „Minkowski-Tensor"}$$

Summenkonvention: $\sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha \equiv d\xi_\alpha d\xi^\alpha$

$$\sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

über paarweise oben/unten auftretende Indizes wird summiert

kenne noch keine Zshg. zwischen $x^\alpha$, $\xi^\alpha$, $\exists$ $\xi^\alpha(x^\mu)$ u. umgekehrt

nach Kettenregel $d\xi^\alpha = d\xi^\alpha(x^\mu) = \sum_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \xi^\alpha(x^\mu)\right) dx^\mu$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{\text{neuer Tensor } g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

„Riemanntensor, metrischer Tensor"

enthält das Gravitationsfeld

Metrischer Tensor wird sich als das Gravitationsfeld herausstellen (Verallgemeinerung.)

z.B. $g_{00} \sim \frac{\Phi_{\text{Newton}}}{c^2}$, später f. Analyse v. Zeitintervallen, etc.

## 6. Teilchen im Gravitationsfeld: erste Korrekturen zu Newton

### 6.1. Teilchenbahn

bisher: $\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha(\tau) = 0$ freie Bewegg.

Ziel: Gleichg. für $\frac{d^2}{d\tau^2}x^\alpha = ?$ ableiten.

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha(x^\beta(\tau)) = \underbrace{\frac{d}{d\tau}\left(\sum_\beta \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)} = 0$$

$$\sum_\beta \left\{\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} + \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}\right)\right\} = 0 \qquad \Big| \sum_\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}$$

besitzen — möchte man gern — daher

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} + \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}}_{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta} = \delta_{\gamma\beta}}\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}}_{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}} = 0$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\sum_\mu \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\sum_{\beta\mu}\underbrace{\left(\sum_\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\mu}\right)}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Christoffelsymbol $\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}$

Bewegungsgleichung f. Teilchenbahn:
$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} = -\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Bemerkungen:

a) wenn $\Gamma$ bekannt, so ist dies Gleichung f. $x^\gamma(\tau)$, Newton ähnlich.

b) $\exists$ Zusammenhang zwischen $g$ und $\Gamma$:
$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad \text{o. Beweis}$$

$$g^{\sigma\nu} \cdot g_{\nu\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu} \qquad \text{inverse Matrix definiert}$$

c) $g_{\sigma\nu}$ entweder störungstheoretisch
oder über Einsteinfeldgleichungen