

### 4.2.3. Weitere Erzeugende, insbesondere $R_2 = W = S$

Weitere Erzeugende existieren, jeweils andere Variablen:

$$R(q_k, Q_k, t) \rightarrow R_i \text{ (andere Variable)}, i \text{ nummeriert die } kT$$

$$R(q_k, Q_k, t) \equiv R_1(q_k, Q_k, t)$$

$$\text{neu: } R_2 = R_2(q_k, P_k, t) = R_1(q_k, Q_k, t) + \sum_k P_k Q_k$$

↑  
großes Buchstabe

Um  $R_2$  und  $H$  in den neuen Koordinaten zu finden ( $H \rightarrow H'(Q_k, P_k)$ ) Differenz bilden:

$$dR_2(q_k, P_k, t) = dR_1(q_k, Q_k, t) + \sum_k (P_k dQ_k + dP_k Q_k)$$

Vergleich der Differenziale:

$$(i) \quad dq_k: \quad \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = P_k \quad \rightarrow \quad \boxed{P_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k}}$$

↑  
links VL, aus folgd. f.  $R_1$

$$(ii) \quad dP_k: \quad \boxed{\frac{\partial R_2}{\partial P_k} = Q_k}$$

$$(iii) \quad dt: \quad \frac{\partial R_2}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} = H' - H \quad \rightarrow \quad \boxed{H' = H + \frac{\partial R_2}{\partial t}}$$

↑  
links VL, aus folgd. f.  $R_1$

$$(iv) \quad dQ_k: \quad 0 = \frac{\partial R_1}{\partial Q_k} + P_k \quad \rightarrow \quad \boxed{P_k = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_k}} \quad (\text{keine wir schon links VL})$$

aus (iii)  $\Rightarrow$  
$$H'(Q_k, P_k, t) = H(q_k, p_k, t) + \frac{\partial}{\partial t} R_2(q_k, P_k)$$

gewünscht, soll möglichst einfach gewählt werden über  $R_2$

alte Koordinate der rechten Seite eliminieren durch

(i)  $P_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k}$  und (ii)  $Q_k = \frac{\partial R_2}{\partial P_k}$

2 Gleichung um 2 Variable  $(q_k, p_k)$  auszu-tauschen

größten kT über  $R_3 = R_3(p_k, Q_k, t)$   
 $R_4 = R_4(p_k, P_k, t)$  } analoges Vorgehen

Beispiel Dipolnäherung f. Teilchen-Feld-Wechselwirkung

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi$$
 , Variable vom Teilchen:  $\vec{r}, \vec{p}$   
 $\vec{A}(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}, t), q$ : Ladung

$$R_2(\vec{r}, \vec{P}, t) = q \vec{r} \cdot \underbrace{\vec{A}(\vec{r}=0, t)}_{\vec{r}=0, \text{Dipolnäherung}} + \vec{P} \cdot \vec{r}$$

aus  $H' = H + \frac{\partial}{\partial t} R_2$  vorgehen, um  $H' = H'(\vec{R}, \vec{P})$  zu finden

(iii) 
$$H' = \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi + q \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(0, t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \cdot \vec{r}}_0$$

(i)  $\vec{P} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} R_2 \Rightarrow \vec{P} = (q\vec{A} + \vec{P}) \rightarrow \vec{P} = (\vec{p} - q\vec{A})$

(ii)  $\vec{R} = \vec{\nabla}_{\vec{P}} R_2 \Rightarrow \vec{R} = \vec{r}$

(i, ii) f. rechte Seite in  $H'$  verwenden (iii)

$$H' = \frac{\vec{P}^2}{2m} + q \phi(\vec{R}, t) + q \vec{R} \cdot \partial_t \vec{A}(\vec{0}, t) = H'(\vec{R}, \vec{P})$$

analog. kinetisch  
Energie freier Teilchen  $\rightarrow$  Vorteil

Umschreiben auf Felder:  $\vec{E}(\vec{0}, t) = -\partial_t \vec{A}(\vec{0}, t)$

$$\phi(\vec{R}, t) = \phi(\vec{0}, t) + \underbrace{\vec{\nabla}_R \phi(\vec{R}, t)}_{R=0} \cdot \vec{R} - \vec{E}_L(\vec{0}, t)$$

$$H' = \frac{\vec{P}^2}{2m} + q \phi(\vec{0}, t) - q \vec{R} \cdot \vec{E}(\vec{0}, t), \quad \vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L$$

kann i.a. zu Null gesetzt werden,  $\nabla$  Eichfreiheit

$$H'(\vec{R}, \vec{P}) = \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2m}}_{\text{kinet. Energie}} - q \underbrace{\vec{R}}_{\text{Dipol-Moment}} \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{0}, t)}_{\text{Feld}}$$

### 4.3. Hamilton-Jacobi-Theorie

- ideale Erzeugende wechelt in Koordnatsystem  $\{P_k, Q_k\}$

indem die Variablen  $Q_k, P_k$  Erhaltungsgrößen = konstant sind

- eine weitere Idee: wähle  $R_2$  so, daß  $H' = 0$ , denn

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} \rightarrow \dot{P}_k = 0 = \dot{Q}_k$$

Bsp. freie Teilchen und konstante Geschwindigkeit  $\hat{=}$

ausg. mit bewegte Koordinatensystem  $\rightarrow \vec{v}, \vec{r} \hat{=}$  erhalten

Ausführung der Idee:

$H' = H + \frac{\partial}{\partial t} R_2 \hat{=} 0$  stellt jetzt eine Gleichung f.  $R_2$  dar

$$H(q_k, P_k, t) + \frac{\partial}{\partial t} R_2(q_k, P_k, t) = 0 \quad (\text{iii})$$

wissen:  $P_k = \frac{\partial R_1}{\partial q_k}$  (i), einsetzen:

$$H\left(q_k, \frac{\partial R_1}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial}{\partial t} R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

$\hat{=}$  entspricht partielle Dgl. f.  $R_2(q_k, P_k, t)$

in der Notation:  $R_2 \hat{=} W$  folgt: Hamilton-Jacobi-Gleichung f.  $W$ :

$$H\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}(q_k, P_k, t), t\right) + \frac{\partial}{\partial t} W(q_k, P_k, t) = 0$$

Bemerkungen:

a) Bestimmungsgleichung f. erzeugende  $W$ :

Zf kanonische / Hamiltongleichungen werden ersetzt durch eine partielle Differentialgleichung ersetzt und Variable  $q_k$ ,

$P_k$  sollte die Rolle von  $u$  bestimmen konstante,

b) wenn  $W$  bestimmt, so  $Q_k = \frac{\partial W}{\partial P_k}$  (ii),  $Q_k$  ist Ziel!

c) freie Teilchen als Bsp. in 1 Dimension

$$H = \frac{p^2}{2m}, \quad W(x, P_x, t)$$

$$H\text{-J-}gl.: \quad H(x, \partial_x W, t) + \partial_t W(x, P_x, t) = 0$$

$$\Downarrow \quad \frac{1}{2m} (\partial_x W)^2 + \partial_t W = 0$$

$$W = P_x x - \frac{1}{2m} P_x^2 t, \quad \text{das erste bestätigen!}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P_x} &= x - \frac{1}{m} P_x t = x - \frac{P_x}{m} t \hat{=} \text{mitbewegte Koordinatensystem} \\ \text{neue Koord.} \quad \uparrow & \\ P_x = \partial_x W &= P_x \end{aligned}$$

d)  $W = R_2$  ist die Wirkung:  $S = \int_{t_1}^{t_2} dt' L(t')$ , d.h.  $\frac{dS}{dt} = L(t)$

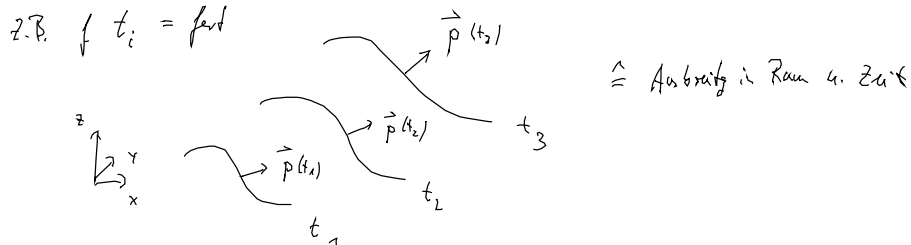
zu zeigen:  $\frac{dW}{dt} = L$

$$\frac{dW(q_k, P_k, t)}{dt} = \sum_k \underbrace{\left( \frac{\partial W}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial W}{\partial P_k} \dot{P}_k \right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{=-H \text{ (H-J-gl.)}}$$

$$= \sum_k P_k \dot{q}_k - H = \underline{\underline{L}} \quad \checkmark$$

→  $W = S = R_2$  alle dasselbe, alle Wirkung  $S = S(q_k, P_k, t)$

e) Interpretation: da  $S$  ein Feld beschreibt in Raum  $q_k$  und Zeit  
Spricht man oft von „Feldwirkung“



wissen aber  $\vec{p} = \vec{\nabla}_r S$  (i) f. Teilchen  
gradient stellt  $\perp$  auf Flächen konstanter Wirkung

f) wenn  $H$  nicht von  $t$  abhängt so  $S$  über Separationssatz bestimmt:

$$H(q_k, \partial_{q_k} S) + \partial_t S = 0, \text{ so } S = -Et + \bar{S}(q_k, P_k) = S(q_k, P_k, t)$$

↑  
 $E = \text{konstant}$

$$\rightarrow H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) = E = \text{konstant}$$

≙ nur ein faden, stationäre Dgl., einfach!

### Rezept f. Hamilton-Jacobi-Formalismus

- 1) man besorge sich  $H(q_k, P_k, t)$
- 2) - u - die H-J-Gleichung:  $H(q_k, \partial_{q_k} S, t) = -\partial_t S(q_k, P_k, t)$
- 3) irgendwie lösen, Separation nach Ort/Zeit versuchen,  $P_k$  sind Integrationskonstanten
- 4) durch Ableitung von  $S(q_k, P_k, t)$  ergibt sich:  

$$P_k = \text{konstant} = \frac{\partial S}{\partial P_k} = f(q_k, P_k, t)$$

5)  $Q_k = f(q_k, P_k, t)$  umstelle und  $q_k = q_k(P_k, Q_k, t) \hat{=}$  Beziehungen  
Konstante

Beispiel: Kegel



generalisierte Koordinaten:  $r, \varphi$

zu 1)  $H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \alpha} + m g r \cos \alpha$  Lsg VL

zu 2)  $H$  hängt nicht explizit v. Zeit ab  $\rightarrow$  stationäre H-J. Gl.:

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \varphi} \right)^2 \right) + m g r \cos \alpha = E, \quad \bar{S} = \bar{S}(\varphi, r)$$

zu 3) Lsg über Separation von  $\varphi, r$ :  $\bar{S} = S_r(r) + S_\varphi(\varphi) \quad \Big| \cdot \sin^2 \alpha \cdot r^2$

$$\frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2m} \left( \frac{\partial_r S_r \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial_\varphi S_\varphi \right)^2 + m g r \cos \alpha \sin^2 \alpha r^2 = r^2 \sin^2 \alpha E$$

$f(r)$ 
 $f(\varphi)$ 
 $f(r)$ 
 $f(r)$

$$\underbrace{\left( \frac{\partial_\varphi S_\varphi \right)^2}_{f(\varphi)} = \underbrace{2m r^2 \sin^2 \alpha \left( E - m g r \cos \alpha - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial_r S_r \right)^2 \right)}_{f(r)} = \text{konstant} \equiv \alpha_\varphi^2$$

weil sind nicht erfüllt

$$\partial_r S_r = \left( 2m \left\{ E - m g r \cos \alpha - \frac{\alpha_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \alpha} \right\} \right)^{1/2} \rightarrow S_r = S_r(r)$$

dam gelöst werden, auch  $\partial_\varphi S_\varphi = \alpha_\varphi \rightarrow S_\varphi = S_\varphi + \alpha_\varphi \cdot \varphi$

24 / Morgen.