4.2.3. Weitere Erzeugende, insbesondere $R_2 = W = S$

Weitere Erzeugende existieren, jeweils andere Variablen:

$R(q_k, Q_k, t) \longrightarrow R_i$(andere Variable), i nummeriert die KT

$$R(q_k, Q_k, t) \equiv R_1(q_k, Q_k, t)$$

neu: $R_2 = R_2(q_k, P_k, t) = R_1(q_k, Q_k, t) + \sum_k P_k Q_k$

großer Buchstabe

um R_2 und H in den neuen Koordinaten zu finden $(H \to H'(Q_k, P_k))$ Differential bilden:

$$dR_2(q_k, P_k, t) = dR_1(q_k, Q_k, t) + \sum_k (P_k\, dQ_k + dP_k\, Q_k)$$

Vergleich der Differentiale:

(i) dq_k: $\quad \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = p_k \longrightarrow \boxed{p_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k}}$

letzte VL, aus Gleichg. f. R_1

(ii) dP_k: $\quad \boxed{\frac{\partial R_2}{\partial P_k} = Q_k}$

(iii) dt: $\quad \frac{\partial R_2}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} = H' - H \longrightarrow \boxed{H' = H + \partial_t R_2}$

letzte VL, aus Gleichg. f. R_1

(iv) dQ_k: $\quad 0 = \frac{\partial R_1}{\partial Q_k} + P_k \longrightarrow \boxed{P_k = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_k}}$ (kennen wir schon letzte VL) aus (iii) $\curvearrowright$ $\underbrace{H'(Q_k, P_k, t)}_{\text{gesucht, soll möglichst einfach gewählt werden über } R_2} = \underbrace{\underbrace{H(q_k, p_k, t) + \frac{\partial}{\partial t} R_2(q_k, P_k)}_{\text{alte Koordinaten der rechten Seite eliminieren durch (i) } p_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k} \text{ und (ii) } Q_k = \frac{\partial R_2}{\partial P_k}}}_{\text{2 Gleichungen um 2 Variable } (q_k, p_k) \text{ auszutauschen}}$

gesucht, soll möglichst einfach gewählt werden über R_2

alte Koordinaten der rechten Seite eliminieren durch

$$(i) \quad p_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k} \quad \text{und (ii)} \quad Q_k = \frac{\partial R_2}{\partial P_k}$$

2 Gleichungen um 2 Variable (q_k, p_k) auszutauschen

weitere KT über $R_3 = R_3(p_k, Q_k, t)$
$R_4 = R_4(p_k, P_k, t)$ } analoges Vorgehen

<u>Beispiel</u> Dipolnäherung f. Teilchen-Feld-WW

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi$$

, Variablen vom Teilchen: $\vec{r}, \vec{p}$
$\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$, q: Ladung

$$R_2(\vec{r}, \vec{P}, t) = q\,\vec{r} \cdot \underbrace{\vec{A}(\vec{r}=0, t)}_{\vec{r}=0,\ \text{Dipolnäherung}} + \vec{P} \cdot \vec{r}$$

aus $H' = H + \partial_t R_2$ verwenden, um $H' = H'(\vec{R}, \vec{P})$ zu finden

$$\text{(iii)} \quad H' = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi + q\,\vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(0, t) + \underbrace{\partial_t \vec{P} \cdot \vec{r}}_{0}$$

$$\text{(i)} \quad \vec{p} = \vec{\nabla}_r R_2 \curvearrowright \vec{p} = (q\vec{A} + \vec{P}) \rightarrow \vec{P} = (\vec{p} - q\vec{A})$$

$$\text{(ii)} \quad \vec{R} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} R_2 \curvearrowright \vec{R} = \vec{r}$$

(i, ii) f. rechte Seite in H' verwenden (iii)

$$H' = \frac{\vec{P}^2}{2m} + q\phi(\vec{R},t) + q\vec{R}\cdot\partial_t \vec{A}(0,t) = H'(\vec{R},\vec{P})$$

$\underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2m}}$ analog. kinetisch Energie freie Teilchen → Vorteil

umschreiben auf Felder : $E_T(0,t) = -\partial_t \vec{A}(0,t)$

$$\phi(R,t) = \phi(0,t) + \underbrace{\vec{\nabla}_R \phi(R,t)\Big|_{R=0}}_{-E_L(0,t)} \cdot \vec{R}$$

$$H' = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \underbrace{q\phi(0,t)}_{\text{kann i.a. zu Null gesetzt werden, } \exists \text{ Eichfreiheit}} - q\vec{R}\cdot\vec{E}(0,t) \quad , \quad \vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L$$

$$H'(\vec{R},\vec{P}) = \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2m}}_{\text{kinet. Energie}} - \underbrace{q\vec{R}}_{\text{Dipol-moment}}\cdot\underbrace{\vec{E}(0,t)}_{\text{Feld}}$$

4.3. Hamilton-Jacobi-Theorie

- ideale Erzeugende wechselt in Koordinatensystem $\{P_k, Q_k\}$
  indem die Variablen Q_k, P_k Erhaltungsgrößen = Konstant sind

– ein faszinierende Idee: wähle R_2 so, daß $H' = 0$, denn

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} \longrightarrow \dot{P}_k = 0 = \dot{Q}_k$$

Bsp. freies Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit $\hat{=}$

analog mitbewegtes Koordinatensystem $\rightarrow \vec{v}, \vec{r} \;\hat{=}$ erhalten

Ausführung der Idee:

$H' = H + \partial_t R_2 \equiv 0$ stellt jetzt eine Gleichung f. R_2 dar

$$H(q_k, p_k, t) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0 \qquad \text{(iii)}$$

wissen: $p_k = \frac{\partial R_2}{\partial q_k}$ (i), einsetzen:

$$H(q_k, \partial_{q_k} R_2, t) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

$\hat{=}$ entspricht partieller Dgl. f. $R_2(q_k, P_k, t)$

in der Notation: $R_2 \equiv W$ folgt: Hamilton-Jacobi-Gleichung f. W:

$$\boxed{H\left(q_k, \partial_{q_k} W(q_k, P_k, t), t\right) + \frac{\partial}{\partial t} W(q_k, P_k, t) = 0}$$

<u>Bemerkungen:</u>

a) Bestimmungsgleichung f. Erzeugende W:

$2f$ kanonische / Hamiltongleichungen werden ersetzt durch eine partielle Differentialgleichung ersetzt mit Variablen q_k,

P_k erhalten die Rolle von unbestimmten Konstanten,

b) wenn W bestimmt, so $Q_k = \frac{\partial W}{\partial P_k}$ (ii), Q_k: ist Ziel!

c) freies Teilchen als Bsp. in 1 Dimension

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad W(x, P_x, t)$$

H-J-Gl.: $H(x, \partial_x W, t) + \partial_t W(x, P_x, t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\partial_x W\right)^2 + \partial_t W = 0$$

$W = P_x x - \frac{1}{2m} P_x^2 t$, durch einsetzen bestätigen!

$$\Rightarrow \quad Q = \partial_{P_x} W = x - \frac{1}{m} P_x t = x - \frac{p_x}{m} t \quad \hat{=} \text{ mitbewegtes Koordinaten-system}$$

neue Koordinate

$$p_x = \partial_x W = P_x$$

d) $W = R_2$ ist die Wirkung: $S = \int^t dt' L(t')$, d.h. $\frac{dS}{dt} = L(t)$

zu zeigen: $\frac{dW}{dt} = L$

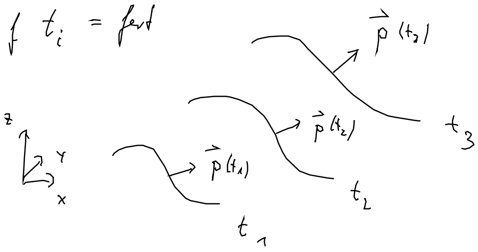
$$\frac{dW(q_k, P_k, t)}{dt} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial W}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial P_k} \dot{P}_k}_{=0} \right) + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{=-H \text{ (H-J.-Gl.)}}$$

$$= \sum_k p_k \dot{q}_k - H = \underline{\underline{L}} \quad \checkmark$$

$\rightarrow W = S = R_2$ alles dasselbe, alles Wirkung $\quad S = S(q_k, P_k, t)$

e) Interpretation: da S ein Feld beschreibt im Raum q_k, und Zeit
spricht man oft von „Führungswelle"

z.B. f t_i = fest $\quad \hat{=}$ Ausbreitung in Raum u. Zeit



wissen aber $\vec{p} = \vec{\nabla}_r S$ (i) f. 1 Teilchen
Gradient steht $\perp$ auf Flächen konstanter Wirkung

f) wenn H nicht von t abhängt so S über Separationsansatz bestimmbar:

$$H(q_k, \partial_{q_k} S) + \partial_t S = 0 \,, \quad \text{so} \quad S = -\underset{\substack{\uparrow \\ E = \text{konstante}}}{E}t + \bar{S}(q_k, P_k) = S(q_k, P_k, t)$$

$$\rightarrow H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) = E = \text{Konstant}$$

$\hat{=}$ eine einfachere, stationäre Dgl., einfacher!

<u>Rezept f. Hamilton-Jacobi-Formalismus</u>

1) man besorge sich $H(q_k, p_k, t)$

2) — " — die H-J.-Gleichung: $H(q_k, \partial_{q_k} S, t) = -\partial_t S(q_k, P_k, t)$

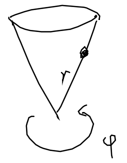
3) irgendwie lösen, Separation nach Ort/Zeit versuchen, P_k sind Integrationskonstanten

4) durch Ableitung von $S(q_k, P_k, t)$ ergibt sich:

$$Q_k = \text{konstante} = \frac{\partial S}{\partial P_k} = f(q_k, P_k, t)$$

5) $Q_k = f(q_k, P_k, t)$ umstellen nach $q_k = q_k(\underbrace{P_k, Q_k}_{\text{Konstante}}, t) \hat{=}$ Bahnkurve

Beispiel: Kegel



generalisierte Koordinaten: r, φ

zu 1) $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ letzte VL

zu 2) H hängt nicht explizit v. Zeit ab $\rightarrow$ stationäre H-J. Gl.:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial \bar S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial \bar S}{\partial \varphi}\right)^2\right) + mgr\cos\alpha = E, \quad \bar S = \bar S(\varphi, r)$$

zu 3) Lsg über Separation von φ, r: $\bar S = S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$ $\Big| \cdot \sin^2\alpha \cdot r^2$

$$\underbrace{\frac{r^2\sin^2\alpha}{2m}(\partial_r S_r)^2}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{2m}(\partial_\varphi S_\varphi)^2}_{f(\varphi)} + \underbrace{mgr\cos\alpha\sin^2\alpha\, r^2}_{f(r)} = \underbrace{r^2\sin^2\alpha\, E}_{f(r)}$$

$$\underbrace{(\partial_\varphi S_\varphi)^2}_{f_\varphi(\varphi)} = \underbrace{2mr^2\sin^2\alpha\left(E - mgr\cos\alpha - \frac{1}{2m}(\partial_r S_r)^2\right)}_{f_r(r)} = \text{Konstant} \equiv \alpha_\varphi^2$$

weil sonst nicht erfüllbar

$$\partial_r S_r = \left(2m\left\{E - mgr\cos\alpha - \frac{\alpha_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha}\right\}\right)^{1/2} \rightarrow S_r = S_r(r)$$

kann gelöst werden, auch $\partial_\varphi S_\varphi = \alpha_\varphi \rightarrow S_\varphi = S_0 + \alpha_\varphi \cdot \varphi$

zu 4.) Morgen.