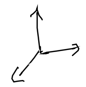
II Spezielle und allgemeine Relativität

für $v \to c$ werden Alltagserfahrungen ungültig : $t \neq t'$!

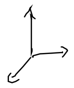
Begriffe die zu Diskussion zwischen Σ, Σ' verwendet werden sollte Lorentzinvariant sein

1. Längen- und Zeitmessung unter Lorentztransformation

Σ Laborsystem



Σ'



Objektsystem, in x Richtg. mit $\vec{v}$ bewegt

$\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,-1}$

$$\left.\begin{array}{ll} x' = \gamma(x - vt) & x = \gamma(x' + vt') \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) & ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ \text{Hin} & \text{Rück} \end{array}\right\} \quad dx'^2 - c^2 dt'^2 = dx^2 - c^2 dt^2$$

= Invariant ist dadurch sichergestellt.

Typische Fragen:

a) Ist Feststellung, daß Gegenstand zu verschiedenen Zeiten sich am selben Ort befindet sinnvoll?

Gegenstand bei $x = 0$ in Σ

für $t = 0$ Start der Bewegg. $x = x' = 0$

f. $t > 0$ $\quad x' = -\gamma v t$, $\quad x = 0 \quad x \neq x'$

→ nicht sinnvoll! gilt für LT und GT

b) Ist Feststellung daß 2 Ereignisse an verschiedenen Orten $x_a \neq x_b$ gleichzeitig stattfinden, sinnvoll?

$\Sigma: x_a \neq x_b$ $\qquad \Sigma' \quad x'_a, x'_b$

$t_a = t_b$ $\qquad t'_a \overset{?}{=} t'_b$

gleichzeitig! $\qquad$ auch gleichzeitig?

$$ct_a' = \gamma(ct_a - \beta x_a)$$
$$ct_b' = \gamma(ct_b - \beta x_b)$$

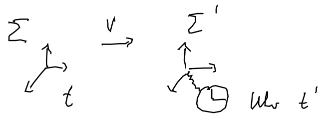
Offensichtlich sind die in Σ gleichzeitig stattfindenden Ereignisse in Σ' nicht gleichzeitig.

$$c(t_a' - t_b') = \underbrace{\beta(x_b - x_a)}_{} \neq 0$$

Begriff der Gleichzeitigkeit verliert Sinn!

$\beta = \frac{v}{c} \xrightarrow[v \ll c]{} 0$ also GT stellt Gleichzeitigkeit wieder her

c) Zeitdilation:



in Σ sieht man bewegte Uhr
in Σ' sieht man ruhende Uhr

Beobachtung v. Zeitintervallen in Σ, Σ': $\Delta t, \Delta t'$

$\Delta t = t_E - t_A$, $\Delta t' = t_E' - t_A'$

A, E: Anfang und Ende eines physikalischen Prozesses

Rücktrafo:
$$ct_E = \gamma(ct_E' + \beta x_E')$$
$$ct_A = \gamma(ct_A' + \beta x_A')$$

$x_E' = x_A'$ weil Uhr / physikalischer Prozess findet in mitbewegtem KS Σ' statt

$$\underbrace{\Delta t}_{} = \gamma \underbrace{\Delta t'}_{} \qquad \gamma > 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t > \Delta t'}$$

Zeitintervall der bewegten Uhr (in Σ bewegt)

Zeitintervall der ruhenden Uhr (in Σ' fest)

↑ Vorgang schneller

i) Jede Uhr / Vorgang geht am schnellsten wenn sie/er mit dem ruhenden Beobachter verbunden ist (Σ')

$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$, bewegte Uhren gehen langsamer!

ii) Die Zeit die mit der fest verbundenen Uhr d. Beobachters abläuft heißt „Eigenzeit".

Bsp: Zerfall von Myonen, Lebenszeit $T_L = 2 \cdot 10^{-6}\,s$ mit ruhendes Myon

Entstehg. in 12 km Höhe mit Anfangsgeschwindigkeit $3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$

durch Bewegg. mit v muß man Σ, Σ' ineinander umrechnen

GT $\quad x = x' + v t' \Big|_{\substack{x'=0 \\ t'=T}}$ (mit Teilchen verbundenes System Σ') $= \underline{\underline{600\,m}}$

Strecke die Teilchen sich bewegen kann

Elementarteilchen dürfte nicht nachgewiesen werden

$\gamma \approx 20$

LT $\quad x = \gamma (x' + v t') \Big|_{\substack{x'=0 \\ t'=T_L}} = \underline{\underline{12\,km}}$ $\rightarrow$ Korrektur der LT ist wichtig um zu verstehen, wann das Teilchen Erdoberfläche erreicht.

d/ Längenkontraktion (ÜA)

$$\underbrace{\Delta x'}_{\text{in } \Sigma' \text{ ruhende Länge}} = \gamma \underbrace{\Delta x}_{\text{in } \Sigma \text{ bewegte Länge}} \qquad \gamma > 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta x < \Delta x'$$

Bewegtes Objekt erscheint in Bewegungsrichtung verkürzt

e/ Addition v. Geschwindigkeiten

ist nicht einfach additiv, muß durch Hintereinanderausführg. v. LT ausgeführt werden

2/ Formulierung im Minkowskiraum

Vierer schreibweise Ort und Zeit werden verbunden als Vierervektoren

$$\Sigma: \quad (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\alpha) \qquad \alpha = 0,1,2,3$$

griechisch: 0…3, lateinisch: 1,2,3

4d Raum $\hat{=}$ Minkowskiraum

a/ Abstand im Minkowskiraum

Newton: Abstand im Ortsraum: $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ = invariant f. $\Sigma \to \Sigma'$ (GT)

Minkowski: Abstand zw. Vierervektoren: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ = invariant f. $\Sigma \to \Sigma'$ (LT)

$$ds^2 \neq \sum_\alpha dx^\alpha dx^\alpha$$ ist ungünstig weil Vorzeichen nicht stimmt f. dx^2 usw

neu: $x^\alpha = (ct, x, y, z)$, $x_\alpha = (ct, -x, -y, -z)$

$$ds^2 = \sum_\alpha dx^\alpha dx_\alpha$$ ist dann richtig definiert und invariant

b) Eigenzeit

$$\sum_\alpha dx^\alpha dx_\alpha = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt^2\left(1 - \underline{\underline{\frac{dr^2}{dt^2}}}/c^2\right)$$

bisher alle differentiell $\underline{\underline{\frac{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}{dt^2}}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v^2(t)$

$\vec{r}(t)$: beobachtete Objekt das sich in Σ bewegt.

$$\Rightarrow \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)dt^2 \to \frac{ds}{c} \equiv d\tau = \gamma^{-1}\,dt = \text{invariant}$$

Eigenzeit, d.h. auf Uhr die mit dem Teilchen $\vec{r}(t)$ verbunden ist.

3. Spezielle relativistische Dynamik

Newton: t ist in allen Σ gleich

Einstein: τ ist in allen Σ gleich $\to$ $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, weil dann τ automatisch Lorentzinvariant

3.1. Vierergeschwindigkeit $u^\alpha(\tau)$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\alpha(\tau)$$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} \underbrace{(ct, \vec{r}(t))}_{\text{Vorstellg., daß } t(\tau) \text{ bekannt}} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(c\gamma(t), \vec{v}(t)\gamma(t)\right)$$

(x, y, z)

Viererimpuls definiere $p^\alpha \equiv m u^\alpha = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$

3.2. Relativistische dynamische Bewegungsgleichung

Einsteins Ansatz $\frac{d}{d\tau} p^\alpha(\tau) = f^\alpha(\tau)$, Unterschied Newton: 4 Indizes, τ-abhängig

gesucht Bahnkurve $\vec{r}(t)$

3.2.1. Raumkomponenten

$\alpha = 1, 2, 3$ $\quad \frac{d}{d\tau} p^\alpha = f^\alpha \rightarrow \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} p^\alpha = f^\alpha \rightarrow \frac{d}{dt} p^\alpha = \gamma^{-1} f^\alpha$

a) $\frac{d}{dt} p^\alpha = \frac{d}{dt}\left(m v^\alpha(t)\gamma(t)\right)\Big|_{\text{Produktregel}}$ $\quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$= \underbrace{m}_{\text{Newton}}\left(\dot{v}^\alpha\gamma + v^\alpha\gamma^3\frac{1}{c^2}\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)$$

Newton, offensichtlich viel schwieriger

b) $\frac{d}{dt} p^\alpha = \gamma^{-1} f^\alpha \equiv f_N^\alpha$ Ansatz! rechte Seite $\hat{=}$ Newtonkraft

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t)\, v^\alpha(t)\right) = f_N^\alpha \quad \text{mit } m_{rel}(t) = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{1/2}}}$$

relativist. Bewegungsgl. f. Objekt $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$

f. $v \ll c$ gilt $m = m_{rel}$: Newtongrenzfall