Nachtrag letzte Vorlesung:

Innenraum Kugel – Interpretationsproblem

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{f}_g(\vec{r}_n) = -\frac{G m_n M}{R^3}\vec{r}_n \quad \hat{=} \text{ rücktreibende Kraft zum Mittelpunkt d. Kugel}$$

(Oszillatorgleichung)

↯ jeder MP n müsste im Zentrum $\vec{r}_n = 0$ zur Ruhe kommen beim Vorliegen von Reibung

$\Rightarrow$ Kollaps von Sternen / Fußbällen etc.

↯ $\exists$ Gegenkraft um stabile Objekte zu erzeugen: thermischer Druck (Sonne)

elektromagn. Energie

Fermi druck (quantenmechanisch)

<u>Bsp.</u> Druck / Gegenkraft d. idealen Gas: $p = n k T$ ← Temperatur

K: Boltzmann Konstant

p: Druck, $n = \frac{N}{V} = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Volumen}}$

Suche Gleichgewicht:
$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\substack{\text{Gesamtkraft } F \\ \text{Gravitation auf Oberfläche } A}} = \overbrace{\frac{N}{V} kT}^{\text{thermischer Druck}} \quad \text{„Stabilitätskriterium"}$$

Kugelsymmetrie: $F = \sum_n$ Kräfte auf alle MP n

$$\sum_n r_n \frac{G M m_n}{R^3} \Big/ 4\pi R^2 = \frac{N}{V} kT \quad , \quad V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\frac{1}{\Delta V} \sum_n \Delta V \, r_n \frac{G M m_n}{R^2} = 3 N k T \quad \Big/ : N \quad , \quad m_n \equiv m$$

$$\frac{1}{\underbrace{N \cdot \Delta V}_{V}} \int_0^R dr \, r^2 \cdot \underbrace{4\pi}_{\substack{\text{Winkel} \\ (\vartheta, \varphi)}} \, r \frac{G M m}{R^2} = 3 k T$$

$$\frac{1}{V}\,\frac{4\pi}{4}\,R^4\,\frac{GMm}{R^2} = 3kT \longrightarrow \boxed{\frac{GMm}{R} = 4kT}$$

mit $V = \frac{4\pi}{3}R^3$

(einfaches Modell)

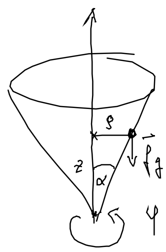
Stabilitätskriterium das R, T und M miteinander verbindet:
bestimmte T muß erreicht werden damit Stern sich bei R stabilisiert

$$kT \sim 300\,eV \sim 10^6 K$$

3. Nebenbedingungen und Zwangskräfte

- Nebenbedingungen (NB): äußere Einschränkungen die nicht externen Kräften zugeordnet werden können / sollen
- Freiheitsgrade (FG): Zahl der voneinander unabhängigen Variablen
  System mit r NB und N Teilchen hat f Freiheitsgrade
  $$3N - r = f$$
- Zwangskräfte (ZK): sind in Newtongleichung einzuführen, um NB zu realisieren

Beispiel: MP auf Kegelmantel



NB: $\tan\alpha = \frac{\rho}{z}$

FG: $f = 3N - r = 3 - 1 = 2$

$\vec{f}_g$: eingeprägte Kraft

$\vec{Z}$ (ZK) wird System auf Kegelmantel stabilisieren

3.1. Arten von Nebenbedingungen

a) holonome NB („ganz gesetzlich")

Sind durch geschlossene Gleichung gegeben: $g_\alpha \left(\{\vec r_j\}, t \right) = 0$

$j: 1 \dots N, \quad \alpha = 1 \dots r$

Bsp: Kegel $g_1(\vec r) = z \, tg \, \alpha - \rho = 0$

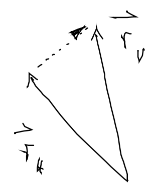
$$\frac{d}{dt} g_\alpha \left(\{\vec r_j\}, t \right) = \underbrace{\sum_{u=1}^{N} \sum_{i=1}^{3}}_{N \text{ Teilchen mit Komponenten } x_{ui}, \; u: \text{Teilchen}, \; i: \text{Komponente}} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_{ui}} \frac{d x_{ui}}{dt} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

b) nicht holonome NB: bei Fehlen eines integrierenden Faktors sind die NB in Differentiale gegeben

$$\sum_{u=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} h_{\alpha i} \left(\{\vec r_j\}, t \right) \frac{d x_{ui}}{dt} + h_0 \left(\{\vec r_j\}, t \right) = 0$$

mindestens 2 MP, schwierig, denken bald nicht mehr drüber nach

Bsp Fahrrad



Vorder-, Hinterrad (V, H):

i) $|\vec r_V - \vec r_H| = L = \text{fest}$

ii) Hinterrad muß beim Fahren in Richtg. $\vec r_V - \vec r_H$ zeigen

$$\dot{\vec r}_H \times (\vec r_V - \vec r_H) = 0$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}(\dots)} = \frac{d}{dt} \vec r_H \times (\vec r_V - \vec r_H) = 0$$

geht i.a. nicht

nach Zeitabhängigkeit

c) rheonome NB („fließgesetzlich")
zeitabhängig

d) skleronome NB („starrgesetzlich")
nicht zeitabhängig

2 Lösungsansätze:

1) Lagrangegleichungen 1. Art $\hat{=}$ modifizierte Newtongleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{Z}$$ 3.2.

eingeprägt, Zwangskräfte, simulieren die NB

Aufgabe: $\vec{Z}$ bestimmen

2) Lagrangegleichungen 2. Art $\hat{=}$ Verwendung v. Koordinaten die die NB automatisch beinhalten

verwende NB um eine Koordinate aus L zu eliminieren 3.3.

Ausgangspunkt:

a) Lagrangefunktion ohne NB

$$L = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{m_n}{2} \dot{x}_{ni}^2 - V(\{x_{ni}\}) = (T - V)$$

b) NB: $g_\alpha(\{x_{ni}\}, t) = 0$

kann beides in kartesischen o. krummlinigen Koordinaten formuliert werden

3.2. Zwangskräfte in Newtongleichungen: „Lagrange 1. Art"

Hamiltonprinzip: Wirkung wird bei realer Bewegung extremal, $S = \int dt\, L$

aus $\delta S = 0$

$$0 = \int dt \sum_{n,i}^{3N} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^0_{ni}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0_{ni}} \right)}_{\substack{=0 \text{ nur wenn kein NB vorliegen} \\ \neq 0 \text{ wenn NB vorliegen}}} \delta x_{ni} \qquad x^0_{ni} : \text{realisierte Bahn}$$

Ziel: durch Einbau der NB δx_{ni} linear unabhängig zu machen

$$g_\alpha(\{x_{ni}\},t) = \underbrace{g_\alpha(\{x^0_{ni}\},t)}_{=0 \,\hat{=}\, \text{reale Bahn}} + \underbrace{\sum_{ni}^{3N} \frac{\partial}{\partial x^0_{ni}} g_\alpha(\{x^0_{ni}\}) \,\delta x_{ni} = 0}_{\forall \alpha \text{ eine Gleichung } *}$$

Variation der NB
Zeit wird nicht mitvariiert

$x_{ni} \to x^0_{ni} + \delta x_{ni}$

Methode der Lagrangemultiplikatoren:

- $*$ mit $\lambda_\alpha(x^0_{ni}, \dot{x}^0_{ni})$ (Lagrangemultiplikator) multiplizieren,
- über t integrieren
- $\sum_\alpha$ nehmen und zu Hamiltonprinzip addieren

$$0 = \int dt \sum_{n,i}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x^0_{ni}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0_{ni}} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x^0_{ni}} g_\alpha(\{x^0_{ni}\}) \right) \delta x_{ni}$$

Idee: λ_α sind noch frei, werden so gewählt, daß Klammer verschwindet

($\exists$ genauso viele Bedingungen wie abhängige Variablen unter den δx_{ni})

$\rightsquigarrow (\ldots) = 0 \rightsquigarrow$

Index 0 weglassen

$$m_n \ddot{x}_{ni} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x_{ni}}}_{\substack{\text{eingeprägte Kraft} \\ f_{ni}}} + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{ni}} g_\alpha(\{x_{ni}\})}_{\substack{\equiv \text{ Zwangskraft} \\ Z_{ni}}}$$

Euler-Lagrange Gleichung 1. Art

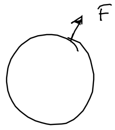
Die Zwangskraft ist über NB festgelegt:

$$\vec{Z}_n = \sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_n g_\alpha(\{\vec{r}_i\})$$

$\vec{Z}_n$ wird durch Gradienten auf Fläche g_α bestimmt:

$\vec{Z}_n$ hat a) keine Komponente in der Fläche

b) steht $\perp$ auf Fläche

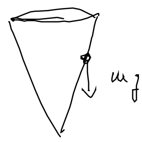


$\vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g$

Allg. Vorgehen:

1. Formulieren der NB, Koordinaten wählen
2. Lagrange 1. Art aufstellen $\vec{Z}_n$ und $\sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_n g_\alpha(\{\vec{r}_j\})$ bestimmen
3. Lagrange Multiplikatoren bestimmen und eliminieren aus Bewegungsgleichungen: jede NB zweimal differenzieren und mittels der vorliegenden Bewegungsgl. λ_α eliminieren

Beispiel: 1 MP, Kegel



1. NB: $g_1(\rho, z) = \rho - z \,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$

Zylinderkoordinaten: ρ, φ, z

2. Lagrange 1. Art: $m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-mg\vec{e}_z}_{\text{eingeprägt}} + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}_{\text{Zylinder}} = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$$

in Komponenten:

i) $\vec{e}_\rho$: $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 0 + \lambda_1 \cdot 1$ $\qquad Z_\rho = \lambda_1$

ii) $\vec{e}_\varphi$: $m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 + \lambda_1 \cdot 0$ $\qquad Z_\varphi = 0$

iii) $\vec{e}_z$: $m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \,\mathrm{tg}\,\alpha$ $\qquad Z_z = -\lambda_1 \,\mathrm{tg}\,\alpha$

3. λ_1 eliminieren:

$$\frac{d^2}{dt^2} g_1 \overset{!}{=} 0 = \ddot{\rho} - \ddot{z}\, tg\,\alpha = 0$$

Zshg zwisch $\ddot{\rho}$ und $\ddot{z}$: $\ddot{\rho} = \ddot{z}\, tg\,\alpha$ $\Big\}$ nutzen um $\lambda_1 = \lambda_1 (x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i})$

verbindet i/ und iii/

$$\text{i/} \quad m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda_1 \xrightarrow[\text{lösch NB}]{} m\ddot{z}\, tg\,\alpha = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda_1$$

$$\text{iii/} \quad \ddot{z} = -g - \frac{\lambda_1}{m} tg\,\alpha$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{m\rho\dot{\varphi}^2 + mg\, tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

: damit ist λ_1 bestimmt : $\lambda_1 = \lambda_1 (\rho, \dot{\varphi})$

$$\text{i/} \quad (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{g\, tg\,\alpha + \rho\dot{\varphi}^2}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\text{ii/} \quad (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0$$

$$\text{iii/} \quad \ddot{z} = -g + \frac{\rho\dot{\varphi}^2 + g\, tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}\, tg\,\alpha$$

nichtlineares dynamisch Gleichungssystem f. $\rho, \varphi, z\,(t)$.