

## 2. Folgerungen aus Newtongleichung und Gravitationsgesetz

### 2.1. Newtons zwei Feinestrüche

- Axiome aus Exp. Physik bekannt
- f. theoret. Formulierung sind die beiden Gleichungen f. Newtons Grundgesetz (a) und die Gravitationskraft ausreichend

a)  $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$  „Kraft benötigt, um Impuls zu ändern“

$\Rightarrow$  Kraftfreie Bewegung  $\vec{f} = 0 \quad \Downarrow \quad \dot{\vec{p}} = 0 \quad \Downarrow \quad \vec{p} = \text{konstant}$   
 $\hat{=}$  gleichförmig, geradlinige Bewegung

b/ Kraft v. MP2 auf MP1:

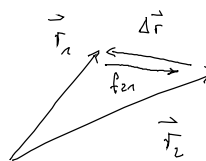
$$\vec{f}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \sim \begin{cases} \text{entlang Verbindungsachse} \\ \frac{1}{\text{Abstand}^2} \end{cases}$$

$G$  - Gravitationskonstante =  $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Mathematische Methode: „Gleichungen“ SS 2018:

Newtons Idee: Kombination eines Kreisbogens mit 3. Keplerschen Gesetz

i) Kraft ist eindeutig:  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$   
 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \Delta \vec{r}$



ii) Vertauschen der Massen 1 und 2:

$$\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2, m_1 \leftrightarrow m_2$$

$\Rightarrow$  actio = reactio, denn  $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$

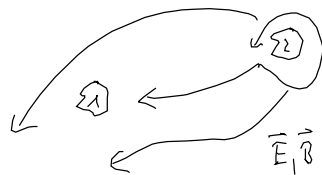
c) Kräftegleichung auf andere Kräfte, z.B. Lorentzkraft in Elektrodynamik

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad : \text{ elektromagnetisch Feld}$$

↑  
 Ladung  $q$ , volle Masse  $m$

i) es existiere weitere Wechselwirkungen über andere Kopplungskonstante ( $\mu, q$ )

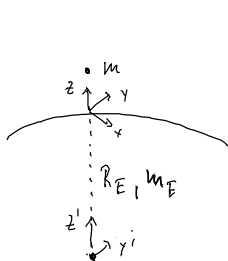
ii) Kraftaustausch kann auch über Felder beschrieben werden



⇒ i.a. Feldtheorie

## 2.2. Gravitation in Erdnähe

Modell zweier MP für Erde / Punktkörper,  $R_E$ : Erdradius



$\vec{E}$  wird beschrieben  
als MP mit  $m_E$  im Mittelpunkt  
(später)

$$\vec{f}_{Em} = - \frac{G m_E m}{|\vec{r} - \vec{r}_E|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_E}{|\vec{r} - \vec{r}_E|} \quad \text{mit } \vec{r}_E' = 0$$

$$= - \frac{G m_E m}{|\vec{r}'|^2} \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$$

$$\vec{r}' = (x', y', z') = (x, y, R_E + z)$$

$$R_E \gg x, y, z$$

$$\text{i) } |\vec{r}'|^2 = x^2 + y^2 + (R_E + z)^2 \approx R_E^2$$

$$\text{ii) } \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + (R_E + z) \vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R_E + z)^2}} \approx \vec{e}_z$$

$$\downarrow \vec{f} = - \frac{G m_E m}{R_E^2} \vec{e}_z \equiv -m g \vec{e}_z, \text{ mit Feldbeschleunigg. } g = \frac{G m_E}{R_E^2}$$

In Erdnähe ist die Gravitationskraft konstant.

Bewertungen:

a) Messung Masse  $m$  erfolgt bzgl. Einheitsmasse  $m_{Ein}$

$m$  und  $m_{Ein}$  werde mit derselben Kraft  $f$  beschleunigt ( $m = \text{konstant}$ )

$$\frac{\ddot{r}}{r} m_{Ein} = \vec{f} = \frac{\ddot{r}}{r} m \rightarrow \frac{m}{m_{Ein}} = \frac{|\vec{a}_{Ein}|}{|\vec{a}|}$$

$$\left( \frac{\ddot{r}}{r} \equiv \vec{a} \right)$$

b) leichte und schwere Masse als zwei Proportionalitätsfaktoren

(i) NG:  $\vec{f} = m_l \vec{a}$   
leichte Masse

(ii) Gravitation:  $\vec{f} = m_s (-g \vec{e}_z)$   
schwere Masse

$$\underbrace{m_l \vec{a} = m_s (-g \vec{e}_z)}$$

Alle Körper fallen gleich schnell  
(Experiment)  $\ddot{z} = -g$

### 2.3. Bilanzgleichungen mechanische Größe

allg. Bilanz von  $Y$ :  $\dot{Y} = X$

Sinnvoll, weil: wenn  $X = 0 \rightarrow Y = \text{Konstante}$

Spezialfall:  $Y$  ist Erhaltungsgröße

a) Impulsbilanz

NG  $\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{f}$ : Impulsbilanz

$\dot{\vec{p}} = 0$ , falls  $\vec{f} = 0 \rightarrow$  Impulserhaltung

b) Drehimpulsbilanz

$$NG \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{f} \quad | \quad \vec{r} \times$$

$$0 + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{f} \equiv \vec{m} \quad \text{Drehmoment}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{m}$$

$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = 0$ , Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{m} : \text{Drehimpulsbilanz} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{m} \quad \text{zeitl. \u00c4ndg. d. Drehimpuls wird d. Drehmoment bewirkt}$$

$$\dot{\vec{L}} = 0, \text{ falls } \vec{m} = 0 \quad \text{kein Drehmoment verschwindet, gilt Drehimpuls erhaltung}$$

Bemerkung: Zentralkraft

a) Felder der Form  $\vec{f} = \vec{r} F(r, \dot{r}, t)$  in Richtung  $\vec{r}$

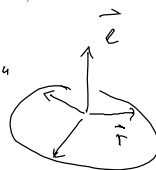
hei\u00dfe Zentralkr\u00e4fte, sind von Nullpunkt weg / hin gerichtet

$$\rightarrow \vec{m} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times \vec{r} F = 0 \rightarrow \vec{L} \text{ ist Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe}$$

b) ausser  $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$   
Spatprodukt

\u2193 wenn  $\vec{L}$  fest im Raum steht, dann

Bewegg.  $\vec{r}$  in  $\perp$  Ebene zu  $\vec{L}$



c) Bilanz der kinetischen Energie

$$NG: \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{f} \quad | \quad \dot{\vec{r}} \cdot$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$$

weil  $\frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$

$\frac{d}{dt} \bar{E}_{kin} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$  : Bilanz der kinetischen Energie  $\bar{E}_{kin} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$

↳ falls  $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = 0$  ist, so ist  $\bar{E}_{kin}$  Erhaltungsgröße

Def Leistung  $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \equiv$  Leistung  $N$

$\dot{\bar{E}}_{kin} = N$  : Bilanz der kinet. Energie

$N$  als Leistung definiert, sinnvoll, weil:

$N = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ , wenn Leistung, dann  $N = \frac{dA}{dt} \hat{=} \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$

$A = \int_0^t dt N(t)$

$A = \int_0^t dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) = \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}' \cdot \vec{f}(\vec{r}', t) \hat{=} \text{Def. der mech. Arbeit}$

d) Bilanz der mech. aus der Energie

Potentialkräfte  $\vec{f}_{kons} = -\vec{\nabla} U$ , setze  $\vec{f} = \vec{f}_{kons} + \vec{f}_{diss}$   
 $\vec{f}_{diss}$  wird über Potentiale darstellbar

$\frac{d}{dt} \bar{E}_{kin} = \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{f}_{kons} + \vec{f}_{diss})$   
 $= -\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}, t)}_{\text{Teil d. Zeitabk. von } U} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{diss}(\dot{\vec{r}})$

Teil d. Zeitabk. von  $U$

$\frac{d}{dt} U = \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U$ ,  $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U$  einsetzen

$\frac{d}{dt} (\bar{E}_{kin} + U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{diss}$  : Bilanz der mechanisch Energie  $E$

E

Eind. Erhaltungsgröße wenn keine dissipative Kräfte vorliegen (nur konservative Kräfte)  
 und sich die potentielle Energie  $U$  nicht explizit v. Zeit abhängt

Bemerkungen: Mathem. Method - 'Integralrechen'

a)  $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0 \iff \exists U$  mit  $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$   
 (Beweis über  $-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = 0$ )

b)  $U$  kann durch Wegintegral aus  $\vec{f}$  berechnet werden.  

$$U(\vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} U}_{-\vec{f}}$$

c) offensichtlich ist  $U(\vec{r}, t)$  nur bis auf eine Konstante bestimmt:

mal gemusst wird  $\vec{f}$ ,  $\vec{f} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla} (U + \text{Zahl})$

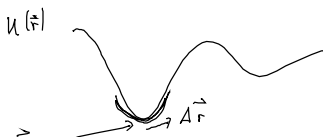
Sprecher: es existiert ein 'Eind. Funktion' bzgl. der Wahl von  $U$

d) Gravitationspotential  $U$

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{f. } m_2 \text{ in Ursprung}$$

$$U(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|} \quad U_A$$

e) Bewegung im Potentialminimum



Wenn wir Bewegung um Minimum interessiert, so Potential berechnen:

$$u(\vec{r}) = u(\vec{r}_0) + \underbrace{\Delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0}}_{\text{Minimum} = 0} + \frac{1}{2} (\Delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 u(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0}$$

$$= u(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \underbrace{\partial_i \partial_j u(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0}}_{u^{ij}}$$

Weglassung von  
Einfachheit

$$u(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} = \sum_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \underbrace{u^{ij}}_{\text{symmetrische Matrix}}$$