2. Folgerungen aus Newtongleichung und Gravitationsgesetz

2.1. Newtons zwei Geniestreiche

- Axiome aus Exp. Physik bekannt
- f. theoret. Formulierg. sind die beiden Gleichungen f. Newton grundgesetz (a) und die Gravitationskraft ausreichend

a) $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ „Kraft benötigt, um Impuls zu ändern"

$\Rightarrow$ Kräftefreie Bewegung $\vec{f} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Rightarrow \vec{p} =$ Konstant

$\hat{=}$ gleichförmige, geradlinige Bewegung

b) Kraft v. MP2 auf MP1:

$$\vec{f}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \sim \begin{cases} \text{entlang Verbindungsachse} \\ \dfrac{1}{\text{Abstandsquadrat}} \end{cases}$$

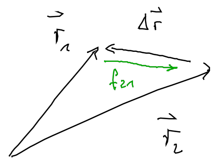
G – Gravitationskonstante $= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Mathematische Methoden: „Grundgleichungen" SS2018:

Newtons Idee: Kombination einer Kreisbahn mit 3. Keplerschen Gesetz

i) Kraft ist anziehend: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}$



ii) vertausche der Nummern 1 und 2:

$\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$, $m_1 \leftrightarrow m_2$

$\Rightarrow$ actio = reactio, denn $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$

c) Verallgemeinerung auf andere Kräfte, z.B. Lorentzkraft in Elektrodynamik

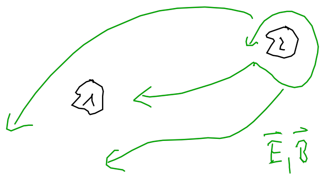
$$\vec{f} = q\,(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad : \text{elektromagnetisches Feld}$$

$\nearrow$

Ladung q, nicht Masse m

i) es existieren weitere Wechselwirkungen über andere Kopplungskonstante (m, q)

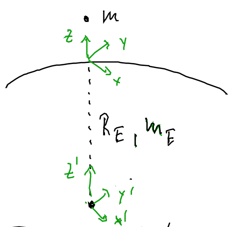
ii) Kraftaustausch kann auch über Felder beschrieben werden



$\Rightarrow$ i.a. Feldtheorie

2.2. Gravitation in Erdnähe

Modell zweier MP für Erde (m_E) / Probekörper (m), R_E: Erdradius



E wird beschrieben als MP mit m_E im Mittelpunkt (spitz)

$$\vec{f}_{Em} = -\frac{G m_E m}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_E\,'|^2} \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}_E\,'}{|\vec{r}\,' - \vec{r}_E\,'|} \quad \text{mit } \vec{r}_E\,' = 0$$

$$= -\frac{G m_E m}{|\vec{r}\,'|^2} \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{r}\,' = (x', y', z') = (x, y, R_E + z)$$

$$R_E \gg x, y, z$$

$\Rightarrow$ i) $|\vec{r}\,'|^2 = x^2 + y^2 + (R_E + z)^2 \approx R_E^2$

ii) $\dfrac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|} = \dfrac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (R_E + z)\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R_E + z)^2}} \approx \vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{f} = -\frac{G m_E m}{R_E^2}\vec{e}_z \equiv -m g \vec{e}_z$, mit Fallbeschleunigung $g = \frac{G m_E}{R_E^2}$

In Erdnähe ist die Gravitationskraft konstant.

Bemerkungen:

a) Messung Masse m erfolgt bzgl. Einheitsmasse m_{Ein}

m und m_E werden mit derselben Kraft f beschleunigt (m = konstant)

$$\ddot{\vec{r}}_{EIN}\, m_{Ein} = f = \ddot{\vec{r}}\, m \rightarrow \frac{m}{m_{EIN}} = \frac{|\vec{a}_{EIN}|}{|\vec{a}|}$$

$(\ddot{\vec{r}} \equiv \vec{a})$

b) träge und schwere Masse als zwei Proportionalitätsfaktoren

(i) NG: $\vec{f} = m_t \vec{a}$ (träge Masse) (ii) Gravitation: $\vec{f} = m_s(-g\vec{e}_z)$ (schwere Masse)

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\cancel{m_t}\ddot{z} = \cancel{m_s}\cdot(-g)}$$

Alle Körper fallen gleich schnell (Experiment) $\ddot{z} = -g$

2.3. Bilanzgleichungen mechanischer Größen

allg. Bilanz von Y: $\dot{Y} = X$

sinnvoll, weil: wenn $X = 0 \rightarrow Y$ = Konstante

Sprechweise: Y ist Erhaltungsgröße

a) Impulsbilanz

NG $\rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{f}$: Impulsbilanz

$\dot{\vec{p}} = 0$, falls $\vec{f} = 0 \Rightarrow$ Impulserhaltung

b) Drehimpulsbilanz

$$NG \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{f} \quad \Big| \; \vec{r}\times$$

$$0 + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{f} \equiv \vec{m} \quad \text{Drehmoment}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{r}\times(m\dot{\vec{r}})}_{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}=0} + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{m}$$

$\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}} = 0$, Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \vec{m} \quad : \quad \text{Drehimpulsbilanz} \quad \vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{m}$$ zeitl. Änderg. d. Drehimpulses wird d. Drehmoment bewirkt

$\dot{\vec{\ell}} = 0$, falls $\vec{m} = 0$ wenn Drehmoment verschwindet, gilt Drehimpulserhaltung

Bemerkung: Zentralkraft

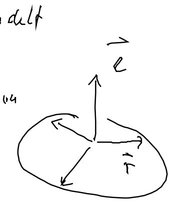
a) Felder der Form $\vec{f} = \vec{r}\,F(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ in Richtg $\vec{r}$

heißen Zentralkräfte, sind von Nullpunkt weg/hin gerichtet

$$\longrightarrow \vec{m} = \vec{r}\times\vec{f} = \vec{r}\times\vec{r}\,F = 0 \rightarrow \vec{\ell} \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

b) außerdem $\vec{r}\cdot\vec{\ell} = \underbrace{\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})}_{\text{Spatprodukt}} = 0$

$\downarrow$ wenn $\vec{\ell}$ fest im Raum steht, dann Bewegg. $\vec{r}$ in $\perp$ Ebene zu $\vec{\ell}$



c) Bilanz der kinetischen Energie

$$NG: \quad \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\right) = \vec{f} \quad \Big| \; \dot{\vec{r}}\cdot$$

$$\dot{\vec{r}}\cdot\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}$$

weil $\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}E_{Kin} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}$$: Bilanz der kinetischen Energie $E_{Kin} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$

$\Rightarrow$ falls $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{f} = 0$ ist, so ist E_{Kin} Erhaltungsgröße

Def Leistung $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{f} \equiv$ Leistung N

$$\dot{E}_{Kin} = N$$: Bilanz der kinet. Energie

N als Leistung definiert, sinnvoll, weil:

$N = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}$, wenn Leistg., dann $N = \frac{dA}{dt} \hat{=} \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$

$$\int_0^A dA = \int_0^t dt\, N(t)$$

$$A = \int_0^t \cancel{dt}\,\frac{d\vec{r}}{\cancel{dt}}\cdot\vec{f}(\vec{r},t) = \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}\,'\cdot\vec{f}(\vec{r}\,',t)$$ $\hat{=}$ Def. der mech. Arbeit

d) Bilanz der mechanischen Energie

Potentialkräfte $\equiv$ $\vec{f}_{kons} = -\vec{\nabla} U$, setze $\vec{f} = \vec{f}_{kons} + \underbrace{\vec{f}_{diss}}_{\text{nicht über Potential darstellbar}}$

$$\frac{d}{dt}E_{Kin} = \dot{\vec{r}}\cdot\left(\vec{f}_{kons} + \vec{f}_{diss}\right)$$

$$= \underbrace{-\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla} U(\vec{r},t)}_{\text{Teil d. Zeitableitg von } U} + \dot{\vec{r}}\,\vec{f}_{diss}(\dot{\vec{r}})$$

$$\frac{d}{dt}U = \frac{\partial}{\partial t}U + \dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla} U$$, $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla} U$ einsetzen

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{E_{Kin} + U}\right) = \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}_{diss}$$: Bilanz der mechanischen Energie E

E

Eist Erhaltungsgröße wenn keine dissipative Kräfte vorliegen (nur Konservative Kräfte) und sich die potentielle Energie U nicht explizit v. Zeit abhängt

Bemerkungen: Mathem. Methode – „Integralsätze"

a) $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0 \Leftrightarrow \exists\, U$ mit $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$

(Beweis über $-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = 0$)

b) U kann durch Wegintegral aus $\vec{f}$ berechnet werden.

$$U(\vec{r}_2) = U(\vec{r}_1) + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} U}_{-\vec{f}}$$

c) offensichtlich ist $U(\vec{r},t)$ nur bis auf eine Konstante bestimmt:

real gemessen wird $\vec{f}$, $\vec{f} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla}(U + \text{Zahl})$

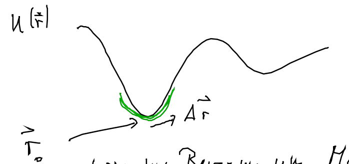
Sprechweise: es existiert eine „Eichfreiheit" bzgl. der Wahl von U

d) Gravitationspotential U

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$ f. m_2 in Ursprung

$$U(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|}$$ ÜA

e) Bewegung im Potentialminimum



wenn nur Bewegung um Minimum interessant, so Potential vereinfachen:

$$U(\vec r) = U(\vec r_0) + \underbrace{\Delta\vec r\cdot\vec\nabla\, U(\vec r)\Big|_{\vec r_0}}_{\text{Minimum} = 0} + \frac{1}{2}\left(\Delta r\cdot\vec\nabla\right)^2 U(\vec r)\Big|_{\vec r_0}$$

$$= \underbrace{\cancel{U(\vec r_0)}}_{\text{weglassen wg. Eichfreiheit}} \qquad \frac{1}{2}\sum_{ij}\Delta x_i\,\Delta x_j\,\underbrace{\partial_i\,\partial_j\, U(\vec r)\Big|_{\vec r_0}}_{U^{ij}}$$

$$U(\vec r)\Big|_{\bar r_0} = \sum_{ij}\Delta x_i\,\Delta x_j\,\underbrace{U^{ij}}_{\text{symmetrische Matrix}}$$