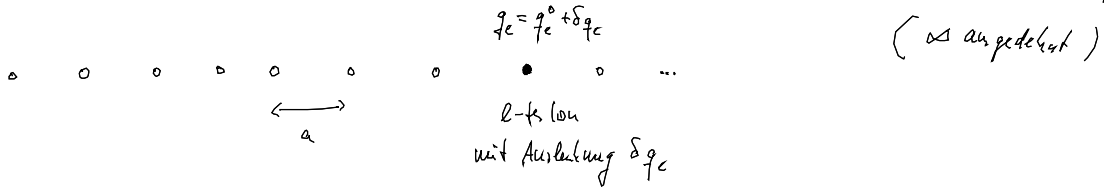


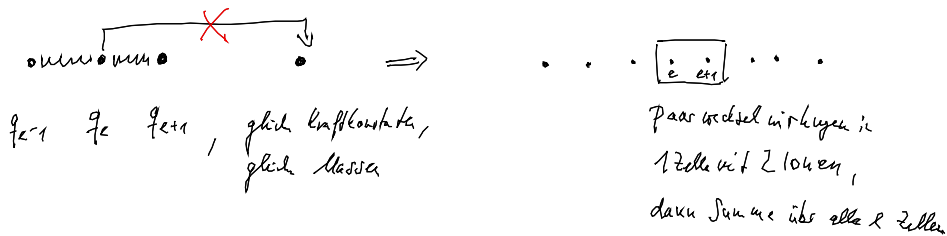
### 3.3. Anwendungen gekoppelter Schwingungen

#### 3.3.1 Festkörper - Loren Schwingungen

Festkörper, naive Modell:  $\circ$  Ionen, lokalisiert um Ruhelage  $q_e^0$ , Abstand  $a$ , eindimensional,



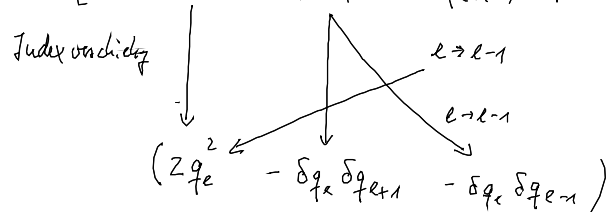
Analyse in "nächster Nachbar Kopplung": Kopplung nur 1 fiber plate nach rechts / links



$$L = T - V = \sum_e \frac{m}{2} \dot{q}_e^2 - \sum_e \frac{k}{2} (\delta q_e - \delta q_{e+1})^2$$

$\leftarrow \bullet \bullet \rightarrow$   
 $e \quad e+1$

mit  $\dot{q}_e = \dot{\delta q}_e$   $= \sum_e \frac{m}{2} \dot{\delta q}_e^2 - \sum_e \frac{k}{2} (\delta q_e^2 - 2\delta q_e \delta q_{e+1} + \delta q_{e+1}^2)$  quadratischer Form?



$$L = \frac{m}{2} \sum_e \dot{\delta q}_e^2 - k \sum_e \left( \delta q_e^2 - \frac{1}{2} \delta q_{e-1} \delta q_e - \frac{1}{2} \delta q_e \delta q_{e+1} \right)$$

allgemeine Form d. Matrix

$$\begin{pmatrix} \square & & & & \\ \square & \square & & & \\ & \square & \square & & \\ \square & & & \square & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

periodisches System: Fourieranalyse

$$\delta q_e(t) = \delta q(t) e^{iQa e} \quad \text{mit Wellenvektor } Q$$

$$L = \frac{m}{2} \sum_e \dot{\delta q}^2 e^{2iQa e} - k \sum_e \delta q^2(t) e^{2iQa e} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-iQa} - \frac{1}{2} e^{+iQa} \right)$$

$$1 - \cos(Qa) = 2 \sin^2\left(\frac{Qa}{2}\right)$$

↓ Matrix hat Diagonalform und die Eigenwerte  $\omega^2$  sind ablesbar.

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{Qa}{2}\right), \quad \text{minimale } N \text{ Stück, wenn man } N \text{ löse}$$

schneidet,  $N \rightarrow \infty$

$$\omega(Q) = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin\left(\frac{Qa}{2}\right) \right|, \quad \omega > 0, \quad Q \text{ und unbestimmt,}$$

definiert Dispersionsrelation

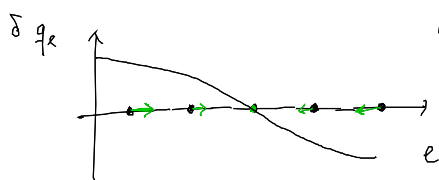
Bemerkungen:

a) Normalmoden sind  $e^{iQa e} e^{-i\omega(Q)t}$  für  $q_e(t) = \sum_Q c_Q e^{iQa e} e^{-i\omega(Q)t}$

↑ Überlagerungskoeffizienten

Normalfrequenzen sind als Dispersionsrelation  $\omega = \omega(Q)$  gegeben.

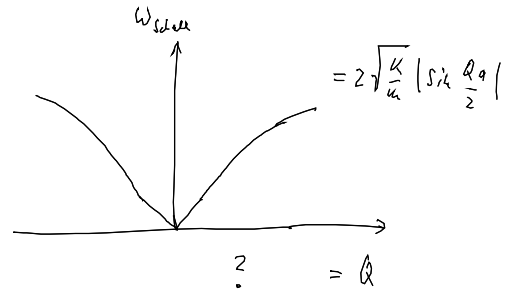
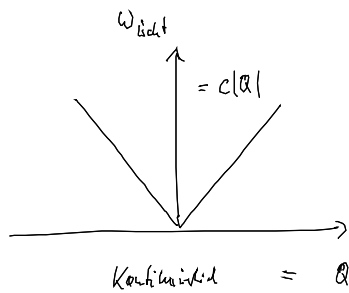
b) Lösungen sind wellenartig: Schallwellen



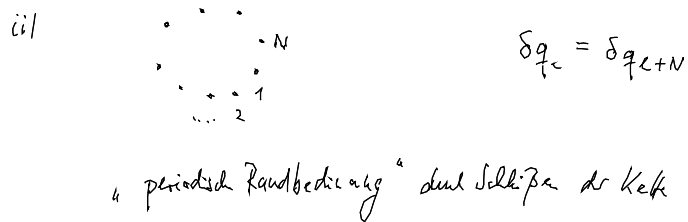
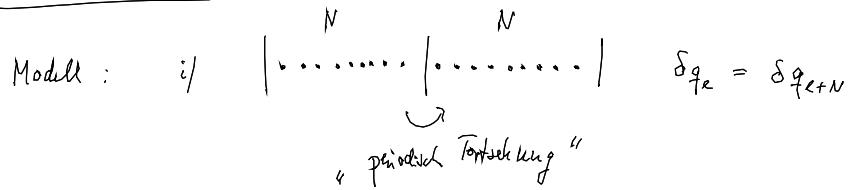
$Q = \text{fest}, t = \text{fest}$ , Blick hinter auf nehmen

$$Q = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{aber } Q \text{ ist noch nicht festgelegt}$$

c) Vergleich mit Hint



d/ Q spezifizieren



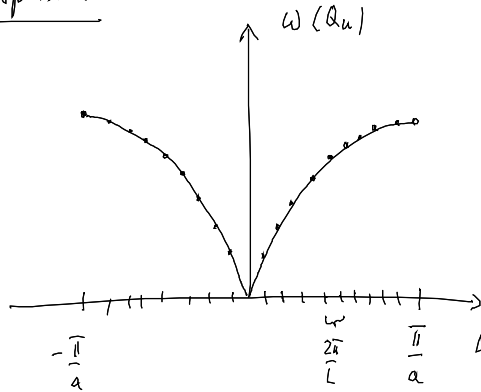
i/ oder ii/  $\Rightarrow \delta q_e = \delta q_{e+N} \Downarrow e^{iQa e} = e^{iQa(e+N)}$

$\Downarrow e^{iQaN} = 1 \rightarrow$  ist nur erfüllt wenn:  $n \frac{2\pi}{L} = QaN$   
 $\uparrow$   
 $n \in \mathbb{Z}$

$Q = n \frac{2\pi}{a N} = n \frac{2\pi}{L}$  : Vielfache von  $\frac{2\pi}{L}$   
 $\uparrow$   
 Kettenlänge

Nur  $N$ -Moden sind erlaubt:  $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$

e) Dispersion:



$Q_{max} \hat{=} \text{minimale Wellenlänge } \frac{2\pi}{Q_{max}}$



die sich in fester Richtung löst

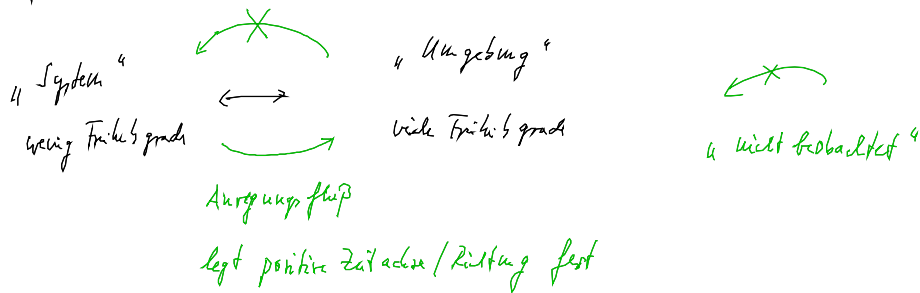
$Q_u = \text{stark Wert}$

f) Interpretation für  $N \rightarrow \infty$  wird Spektrum dicht  $\Delta Q_u \rightarrow 0$

und für kleine  $Q$  gilt  $\omega(Q) = \alpha Q$  mit  $\alpha \hat{=} \text{Schallgeschwindigkeit}$

### 3.3.2. Entstehung von Dissipation und Zeitrichtung

allgemeines Modell f. Dissipation

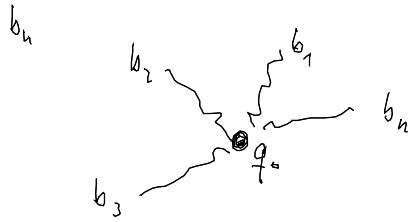


Bsp: System oscillator  $q_0$

$$\ddot{q}_0(t) + \omega_0^2 q_0(t) = - \sum_u g_u b_u(t)$$

Umgebung oscillator  
↑  
Kopplungskonstante

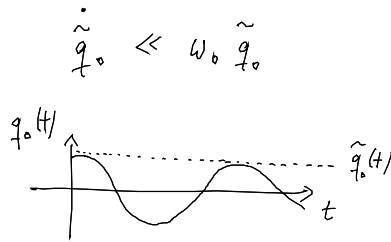
Umgebungsoszillatoren  $\ddot{b}_n(t) + \omega_n^2 b_n(t) = -g_n q_0$



Annahme der schwachen Dämpfung:

$$q_0(t) = \tilde{q}_0(t) e^{i\omega_0 t}$$

$\uparrow$  klein Korrektur,  $\uparrow$  Oszillation  
 $\uparrow$  langsam gegen  $\omega_0^{-1}$



$$\ddot{q}_0 = \frac{d}{dt} \left( \tilde{q}_0 e^{i\omega_0 t} \right) = \left( \ddot{\tilde{q}}_0 + 2i\omega_0 \dot{\tilde{q}}_0 - \omega_0^2 \tilde{q}_0 \right) e^{i\omega_0 t}$$

$\swarrow$  vernachlässigen gegen  $\uparrow$  hebt sich weg in gl.  $\ddot{\tilde{q}}_0$

$$\dot{\tilde{q}}_0 = i \sum_n \frac{g_n}{2\omega_n} \tilde{b}_n e^{i(\omega_n - \omega_0)t} \quad \text{mit} \quad b_n(t) = e^{i\omega_n t} \tilde{b}_n(t)$$

analog  $\dot{\tilde{b}}_n = i \frac{g_n}{2\omega_n} \tilde{q}_0(t) e^{-i(\omega_n - \omega_0)t}$

$$\tilde{g}_n = \frac{g_n}{2\omega_n}$$

$$\tilde{g}_n^0 = \frac{g_n}{2\omega_0}$$

gekoppelte Dgl. 1. Ordnung

Idee:  $\tilde{b}_n(t)$  lösen und in  $\dot{\tilde{q}}_0$  einsetzen

$$\tilde{b}_n(t) = \tilde{b}_n(t_0) + i \int_{t_0}^t \tilde{g}_n \tilde{q}_0(t') e^{-i(\omega_n - \omega_0)t'} dt'$$

$\parallel$   $t_0$   
 $b_n$  Oszillatoren zu Beginn der Dynamik

$$(*)1 \quad \ddot{q}_0 = - \sum_n \tilde{g}_n \tilde{g}_n^0 \int_{t_0}^t dt' \tilde{q}_0(t') e^{-i(\omega_n - \omega_0)(t-t')}$$

(diese Gleichg. ist noch zeitumkehr invariant:  $t \rightarrow -t$ ,  $q_0 \rightarrow q_0^*$ )

wenn  $b_n$  ein fest dämpfte, so  $\tilde{q}_0(t) \approx -\gamma \tilde{q}_0(t) \rightarrow \underline{e^{-\gamma t}}$   $(*)2$

\*1 und \*2 unterscheiden sich dramatisch:

Details über  $\sum_n$  ung., feldtheoretische Effekte sind gelöst. (t')

wichtig:  $\sum_n \tilde{g}_n \tilde{g}_n^0 e^{-i(\omega_n - \omega_0)(t-t')}$  ist reell

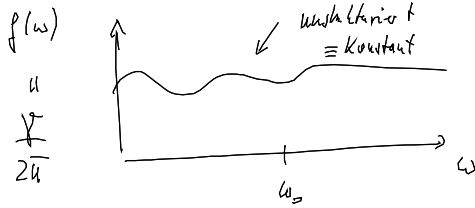
normale Dissipation  $\rightarrow \delta(t-t')$

Bsp dichtliegende Oszillationsfrequenzen, unstrukturierter Umgebung

$$\sum_n \rightarrow \sum_{\{\omega_n\}} \Delta N(\omega_n) = \sum_{\{\omega_n\}} \Delta \omega_n \frac{\Delta N(\omega_n)}{\Delta \omega_n} = \int d\omega \underbrace{u(\omega)}_{\text{Zahl der Oszillatoren pro Frequenz}}$$

Anzahl Oszillatoren bei  $\omega_n$

$$\sum_n \tilde{g}_n \tilde{g}_i e^{-i(\omega_n - \omega_0)(t-t')} \rightarrow \int_0^\infty d\omega \underbrace{\frac{g(\omega) g^*(\omega)}{4\omega \omega_0}}_{f(\omega)} h(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')}$$



$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\gamma}{2h} e^{-i\omega(t-t')} e^{+i\omega_0(t-t')} = \gamma \delta(t-t') \underbrace{e^{i\omega_0(t-t')}}_1$$

$$\downarrow \ddot{\tilde{q}}_0(t) = -\frac{\gamma}{2} \tilde{q}_0(t) \rightarrow \tilde{q}_0 = \tilde{q}_0(0) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (\text{mechanische Dämpfung})$$

Offenheit ersetzt Reibungskraft  $-\gamma \dot{\vec{r}}$  um beim  $\vec{r}(t)$  an eine Umgebung unskaliert koppelt und die Umgebung viele, energetisch verteilte Freiheitsgrade anbietet

Zeitrichtung:  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}_{\text{Umgebung}} \rightarrow m \ddot{\vec{r}} = -\gamma \dot{\vec{r}}$

Zeitunskaliert

$\hat{=}$  wenn  $\vec{r}(t)$  eine Lösung ist, so  $\vec{r}(-t)$  auch eine Lösung

Fall:  $z(t) = h - \frac{g}{2} t^2$

$t \rightarrow -t \quad \checkmark$

zu folg:  $\ddot{z} = -g$

$\frac{d^2}{dt^2}$  invariant  $t \rightarrow -t$

$z(t) \sim e^{+\gamma t}$ , wenn  $t \rightarrow -t$

zu folg:  $\ddot{z} = +\gamma \dot{z}$

$\frac{d^2}{dt^2}$  invariant,  $\frac{d}{dt}$  nicht invariant

Wiederkehrphänomene:

$\sum_u$  f. relativ viel Oszillationen, aber viele (Umgeb. !)

