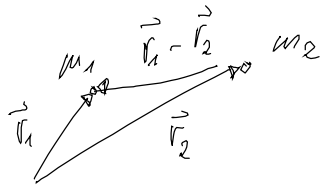


4. Himmelsmechanik

4.1. Zweikörperproblem mit Gravitationswechselwirkung

$$\vec{v}_1(t)$$

$$\vec{v}_2(t)$$



Anziehende Wechselwirkung entlang der Verbindungsgeraden

Kraft auf $\vec{r}_1(t)$:
(durch \vec{r}_2)

$$\vec{F}_{1 \leftarrow 2} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$$

Kraft auf $\vec{r}_2(t)$:
(durch \vec{r}_1)

$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

Neue Koordinaten: \vec{r}, \vec{R}

(i) Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = - \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) m_1 m_2 G$$

mit reduzierter Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ und

Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

$$\Rightarrow M \ddot{\vec{r}} = - G \mu M \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

\Rightarrow damit zurückgeführt auf 1-Teilchen-Problem mit Koordinate \vec{r} , analog zu Problem mit Masse M im Zentrum die auf μ wirkt.

Sinnhaftigkeit von μ siehe Bemerkung (a)

(ii) Schwerpunktkoordinate $M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$

$$M \ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}}(t) = \text{konstant}$$

\uparrow
 existieren

$$\Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{v}_R t$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Bestimmung von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 durch Rücktrafo:

$$\textcircled{1} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \textcircled{2} M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{M\vec{R} - m_1\vec{r}_1}{m_2}$$

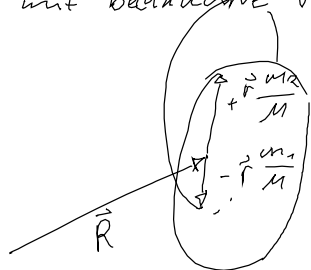
in $\textcircled{1}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \left(\frac{M\vec{R} - m_1\vec{r}_1}{m_2} \right) = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{r}_1 - \frac{M}{m_2} \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{\frac{M\vec{R}}{m_2} + \vec{r}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)} = \frac{M\vec{R} + m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Die zwei Körper bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt \vec{R} mit Bahnkurve $\vec{r}(t)$



Bemerkungen:

(a) reduzierte Masse sinnvoll, wegen Darstellung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} \dot{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{v}_2^2 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 \\ &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_2}{M} \dot{\vec{r}} \dot{\vec{R}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) \\ &\quad + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_1}{M} \dot{\vec{r}} \dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{M}{2} \dot{R}^2$$

(b) Grenzfall $m_2 \gg m_1$, d.h. Sonne-Planetensystem

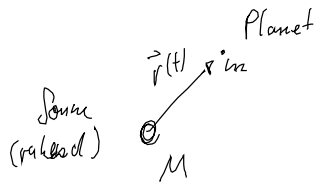
$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \approx \vec{r}_2 = \vec{r}_{pt}$$

$\vec{v}_R = \vec{0}$: die Sonne steht im rühend angenommenen Schwerpunkt $\vec{r}_2 = \vec{R} = \vec{0}$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_1 \equiv m \quad \text{Planetenmasse}$$

$$M = m_1 + m_2 \approx m_2 \equiv M \quad \text{Sonnenmasse}$$

4.2. Auswertung der Erhaltungssätze



$$\vec{F} = -mMG \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Grenzfall $m \ll M$

Erhaltungssätze:

(a) \vec{F} ist Zentralkraft $\vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$ (\vec{L} hier Drehmoment)

Es gilt Drehimpulserhaltung $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{konstant}$

$\vec{F} \cdot \vec{L} = 0$, wenn \vec{L} fest im Raum steht (erhalten),

so ist dies eine Ebenengleichung mit $\vec{r} \perp \vec{L}$:

\vec{r} bewegt sich in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} .

(b) Es existiert ein Potential $U(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (\text{Übung})$$

$$U(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|} \quad (\text{Übungen})$$

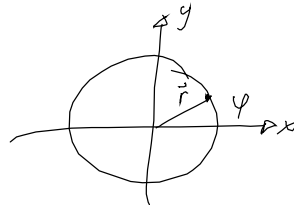
und damit die Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

Bei Gültigkeit des E-Satzes bildet dieser eine Gleichung für $\dot{\vec{r}}$, also für die Bahnkurve; gemeinsam mit der Drehimpulserhaltung unten.

Wählen x-y-Ebene und Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= 0 \end{aligned}$$



Zu (a) Auswertung des Drehimpulssatzes: $\vec{l} = \text{konstant}$

$$\vec{l} = m \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{l} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = m \vec{e}_z (x v_y - y v_x)$$

$$\begin{aligned} &= m \vec{e}_z (r \cos \varphi \dot{r} \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi \\ &\quad - (r \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi)) \\ &= m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$l_z = m r^2 \dot{\varphi} = \text{konstant}, \quad \dot{\varphi} = \frac{l_z}{m r^2}$$

Zu (b) Auswertung des Energiesatzes:

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

dazu: $\dot{r}^2 = v_x^2 + v_y^2 =$ (in Kugelkoordinaten in ÜA)

$$= (r\dot{\varphi}\cos\psi - r\dot{\psi}\sin\psi)^2 + (r\dot{\psi}\sin\psi + r\dot{\varphi}\cos\psi)^2$$

$$= r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - 2r^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\sin\psi + r^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

$$+ r^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + 2r^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\sin\psi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\psi$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2, \quad \text{mit } \dot{\psi} = \frac{L_z}{mr^2}$$

$$= \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}$$

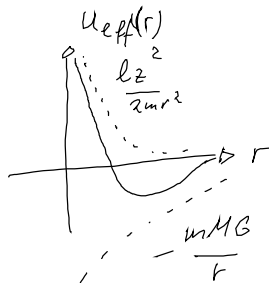
$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad \text{mit } U_{\text{eff}} = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r)$$

Problem ist reduziert auf Bewegung $r(t)$ und

DGL 1. Ordnung, allerdings nichtlinear in

einem effektiven Potential $U_{\text{eff}}(r)$

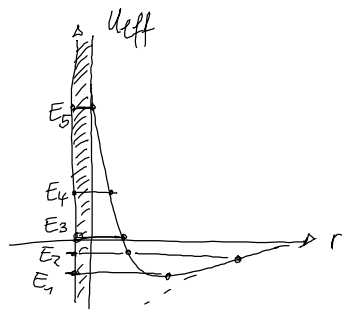


= Summe aus Drehimpuls
und Gravitationspotential

Qualitative Diskussion der Bewegung:

R_z ein fester:

Sonnenradius



$L_z = 0$ (---)

↳ Planet kann nur in die

Sonne fallen

Jeder mit $\dot{r} = 0$ im: (Umkehrpunkte der Bahnkurve)

$E = U_{\text{eff}}(r)$, E kann vorgegeben werden

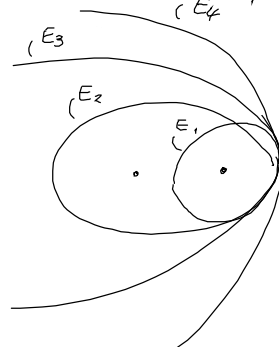
$E_1 < 0$ 1 Umkehrpunkt $\hat{=}$ Kreisbahn

$E_2 < 0$ 2 Umkehrpunkte $\hat{=}$ Ellipse

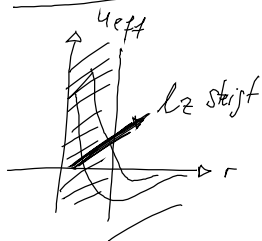
$E_3 = 0$ 1 Umkehrpunkt $\hat{=}$ Parabel

$E_4 > 0$ 1 Umkehrpunkt $\hat{=}$ Hyperbel

$E_5 > 0$ Sturz in die Sonne, Umkehrpunkt zu nah.



4.3. Kosmische Geschwindigkeit für die Erde



(a) Offensichtlich \exists minimaler l_z der Sturz verhindert. Was ist die minimale Geschwindigkeit um eine Bahn zu erreichen?

(b) Unter welcher Bedingung kann ein Objekt die Erdanziehung verlassen?
($E=0$)

zu (a): Mindestgeschw. für Start eines Satelliten:

$$l_z = m R_E \dot{\varphi}, \text{ denn } r \text{ muss minimal } R_E \text{ sein.} \\ (\text{Erdradius})$$

Minimum festlegen:

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0 \quad | \quad r = R_E$$

$$-\frac{2l_z^2}{2mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \quad |_{r=R_E}$$

$$-\frac{l_z^2}{mR_E} + GMm = 0$$

$$+ \frac{(mR_E^2 \dot{\varphi})^2}{mR_E} = GMm$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi R_E/v} = \frac{v}{R_E}$$

$$\left(R_E^2 \frac{v}{R_E} \right)^2 = GM$$

$$R_E v^2 = GM \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{gR_E}$$

Erdparameter:

$v \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ mindestens, um
stabilen Umlauf zu erreichen.

Zu (b) Verlassen der Erdoberfläche bei $E=0$,
liegen bleiben im \mathcal{O} , bei $i=0$

$$0 = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Senkrechter Start: $l_z \approx \dot{\varphi} = 0$

Von Erdoberfl. $r=R_E$

$$v^2 = \frac{2GM}{R_E} = 2gR_E, \quad v = \sqrt{2gR_E} \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$