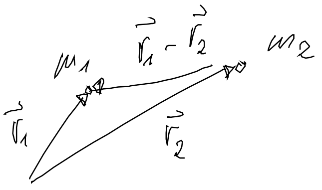
4. Himmelsmechanik

4.1. Zweikörperproblem mit Gravitationswechselwirkung

$\vec{r}_1(t)$

$\vec{r}_2(t)$



Anziehende Wechselwirkung entlang der Verbindungsgeraden

Kraft auf $\vec{r}_1(t)$:
(durch $\vec{r}_2$)

$$\vec{f}_{1\leftarrow 2} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$$

Kraft auf $\vec{r}_2(t)$:
(durch $\vec{r}_1$)

$$\vec{f}_{2\leftarrow 1} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

Neue Koordinaten: $\vec{r}, \vec{R}$

(i) Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) m_1 m_2 G$$

mit reduzierter Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ und

Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

$$\Rightarrow \quad \mu \ddot{\vec{r}} = -G \mu M \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$\Rightarrow$ damit zurückgeführt auf 1-Teilchen-Problem
mit Koordinate $\vec{r}$,
analog zu Problem mit Masse M im Zentrum
die auf μ wirkt.

Sinnhaftigkeit von μ siehe Bemerkung (a)

(ii) Schwerpunktskoordinate $M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \underset{\uparrow \atop \text{einsetzen}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{v}_R t$$

Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Bestimmung von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ durch Rücktrafo:

① $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, ② $M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{M\vec{R} - m_1\vec{r}_1}{m_2}$

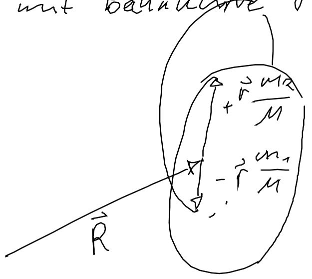
② in ①:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \left(\frac{M\vec{R} - m_1\vec{r}_1}{m_2}\right) = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{r}_1 - \frac{M}{m_2}\vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{\frac{M\vec{R}}{m_2} + \vec{r}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = \frac{M\vec{R} + m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Die zwei Körper bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt $\vec{R}$ mit Bahnkurve $\vec{r}(t)$



Bemerkungen:

(a) reduzierte Masse sinnvoll, wegen Darstellung der kinetischen Energie:

$$\frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_2}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \frac{m_2^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2m_1}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$= \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2$$

(b) Grenzfall $m_2 \gg m_1$, d.h. Sonne-Planeten-System

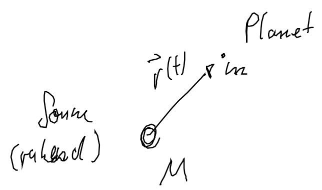
$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \approx \vec{r}_2 = \vec{v}_R t$$

$\vec{v}_R = \vec{0}$: die Sonne steht im ruhend angenommenen Schwerpunkt $\vec{r}_2 = \vec{R} = \vec{0}$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \approx m_1 \equiv m \quad \text{Planetenmasse}$$

$$M = m_1 + m_2 \approx m_2 \equiv M \quad \text{Sonnenmasse}$$

4.2. Auswertung der Erhaltungssätze



$$\vec{F} = -mMG\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Grenzfall $m \ll M$

Erhaltungssätze:

(a) $\vec{F}$ ist Zentralkraft $\vec{r}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{m} = 0$ ($\vec{m}$ hier Drehmoment)

Es gilt Drehimpulserhaltung $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$ = konstant

$\vec{r}\cdot\vec{l} = 0$, wenn $\vec{l}$ fest im Raum steht (erhalten), so ist dies eine Ebenengleichung mit $\vec{r} \perp \vec{l}$: $\vec{r}$ bewegt sich in einer Ebene senkrecht zu $\vec{l}$.

(b) Es existiert ein Potential $U(\vec{r})$

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ (Übung)

$$U(\vec r) = -\frac{mMG}{|\vec r|} \qquad (\text{Übungen})$$

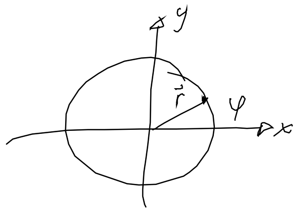
und damit die Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} + U(\vec r)$$

Bei Gültigkeit des E-Satzes bildet dieser eine Gleichung für $\dot{\vec r}$, also für die Bahnkurve; gemeinsam mit der Drehimpulserhaltung unten.

Wählen x-y-Ebene und Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = 0$$



zu (a) Auswertung des Drehimpulssatzes: $\vec l = \text{konstant}$

$$\vec l = m\,\vec r \times \vec v, \qquad \vec r = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec v = \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec l = m \begin{vmatrix} \hat e_x & \hat e_y & \hat e_z \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = m\,\hat e_z\,(x v_y - y v_x)$$

$$= m\,\hat e_z\,\big(\cancel{r\cos\varphi\,\dot r\sin\varphi} + r^2\dot\varphi\cos^2\varphi$$

$$- (\cancel{r\dot r\cos\varphi\sin\varphi} - r^2\dot\varphi\sin^2\varphi)\big)$$

$$= m r^2\dot\varphi\,\hat e_z$$

$$l_z = m r^2 \dot\varphi = \text{konstant}, \qquad \dot\varphi = \frac{l_z}{m r^2}$$

zu (b) Auswertung des Energiesatzes:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} + U(\vec r)$$

dazu: $\dot{\vec{r}}^2 = v_x^2 + v_y^2$ = (in Kartkoordinaten in ÜA)

$$= (\dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi)^2 + (\dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi)^2$$

$$= \dot r^2\cos^2\varphi - 2r\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$+ \dot r^2\sin^2\varphi + 2r\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi$$

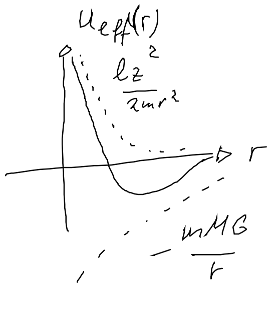
$$= \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2, \qquad \text{mit } \dot\varphi = \frac{l_z}{mr^2}$$

$$= \dot r^2 + \frac{l_z^2}{m^2r^2}$$

$$E = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{l_z^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \qquad \text{mit } U_{eff} = \frac{l_z^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

$$= \frac{m\dot r^2}{2} + U_{eff}(r)$$

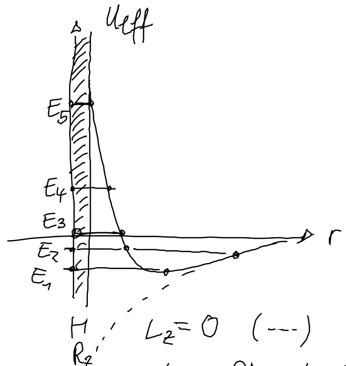
Problem ist reduziert auf Bewegung $r(t)$ und DGL 1. Ordnung, allerdings nichtlinear in einem effektiven Potential $U_{eff}(r)$



≙ Summe aus Drehimpuls und Gravitationspotential

<u>Qualitative Diskussion der Bewegung:</u>

R_Z einführen: Sonnenradius



$L_z = 0$ (---)

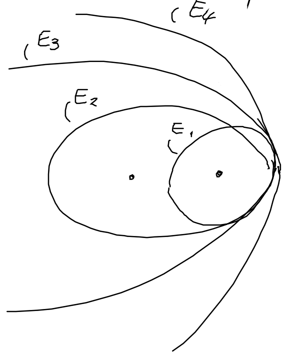
↳ Planet kann nur in die

Sonne fallen

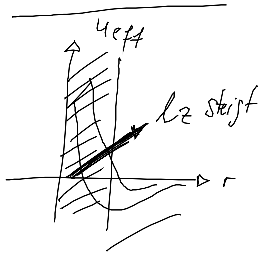
Sehen wir uns $\dot{r} = 0$ an: (Umkehrpunkte der Bahnkurve)

$E = U_{eff}(r)$, E kann vorgegeben werden

$E_1 < 0$	1 Umkehrpunkt	$\hat{=}$	Kreisbahn
$E_2 < 0$	2 Umkehrpunkte	$\hat{=}$	Ellipse
$E_3 = 0$	1 Umkehrpunkt	$\hat{=}$	Parabel
$E_4 > 0$	1 Umkehrpunkt	$\hat{=}$	Hyperbel
$E_5 > 0$	Sturz in die Sonne, Umkehrpunkt zu nah.		



4.3. Kosmische Geschwindigkeit für die Erde



(a) Offensichtlich $\exists$ minimales l_z der Sturz verhindert. Was ist die minimale Geschwindigkeit um eine Bahn zu erreichen?

(b) Unter welcher Bedingung kann ein Objekt die Erdanziehung verlassen? $(E = 0)$

zu (a): Mindestgeschw. für Start eines Satelliten:

$l_z = m R_E \dot{\varphi}$, denn r muss minimal R_E sein. (Erdradius)

Minimum festlegen:

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \overset{!}{=} 0 \Big|_{r = R_E}$$

$$-\frac{2\,l_z^2}{2mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0 \;\Big|_{r=R_E}$$

$$-\frac{l_z^2}{mR_E} + GmM = 0$$

$$+\frac{(mR_E^2\dot{\varphi})^2}{mR_E} = GmM \qquad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi R_E/v} = \frac{v}{R_E}$$

$$\frac{\left(R_E^2 \frac{v}{R_E}\right)^2}{R_E} = GM$$

$$R_E v^2 = GM \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{gR_E}$$

Erdparameter: $v \simeq 7{,}9\,\frac{km}{s}$ mindestens, um stabilen Umlauf zu erhalten.

Zu (b) Verlassen der Erdanziehung bei $E=0$, liegenbleiben im ∞, bei $\dot{r}=0$

$$0 = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

senkrechter Start: $l_z \sim \dot{\varphi} = 0$

von Erdoberfl. $r = R_E$

$$v^2 = \frac{2GM}{R_E} = 2gR_E, \quad v = \sqrt{2gR_E} \simeq 11{,}2\,\frac{km}{s}$$