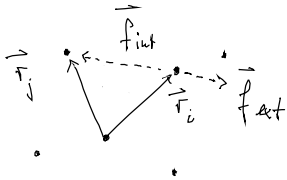


V Vielteilchen Systeme

1. Formulierung und Erhaltungssätze

1.1. Newton Gleichungen



N wechselwirkende Teilchen $(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N)$

+ externe Kraft

$$\vec{f}^i = \vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) + \vec{f}_{\text{int}}(\vec{r}_i, t)$$

Kraft auf
i-tes Teilchen

äußere Kraft
(vorgabe)

innere Kraft
(Summe der Kräfte die zum System gehören)

$$\vec{f}_{\text{int}}(\vec{r}_i, t) = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)$$

Summe über alle
andere Teilchen j
(ohne i)

Kraft des j -ten Teilchens auf \vec{r}_i
typischerweise abhängig von $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \dots$

Gravitation nach Newton

statische elektromagnetische Felder

t : für retardierte Felder

Newton Gleichung:

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i(t)) = \vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)$$

Wirkung, actio = reactio: $\vec{f}_{j \rightarrow i} = - \vec{f}_{i \rightarrow j}$

(Konkret: Gravitation, siehe VL)

1.2. Bilanz und Erhaltungssätze ; $\dot{X} = Y \hat{=} \text{allgemeine Bilanz}$
 $\dot{X} = 0 \hat{=} X\text{-Erhaltung}$

a) Schwerpunktbilanz

Def. d. Schwerpunkts: $\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i(t)$, $M \hat{=} \text{Gesamtmasse } \sum_i m_i$

Massen gewichtetes Mittel der Ortsvektoren

\sum_i Newtongleichg. des i -ten Teilchens:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{i \neq j} \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_*$$

$$* = \sum_{ij} \vec{f}_{j \rightarrow i} = - \sum_{ij} \vec{f}_{i \rightarrow j} = - \sum_{ij} \vec{f}_{j \rightarrow i} = 0$$

↑
↑

actio-reactio
i ↔ j

$$\frac{d}{dt} [M \dot{\vec{R}}(t)] = \sum_i \vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) \equiv \vec{F}_{\text{ext}}(t) \quad \text{Schwerpunktbilanz}$$

- Der Impuls des Schwerpunkts \vec{R} bewegt sich mit Gesamtmasse M so, als wenn die Summe aller externen Kräfte am Schwerpunkt angreifen.
- Rechtfertigung d. Massepunktmodells
- für $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \rightarrow \dot{\vec{R}}(t) = \vec{v}_0 = \text{konstant}$ (Erhaltungsgroße)
 (gleichförmig geradlinig)

• kann auch als Impulsbilanz geleitet werden.

b) Impulsbilanz

Def. d. Gesamtimpulses $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i(t)$

Summe über alle Einzelimpulse

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \text{Impulsbilanz}$$

für $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Downarrow \quad \vec{P}(t) = \vec{P}_0 = \text{konstant} \quad (\text{Erhaltungsgröße})$

c) Drehimpulsbilanz

Def. Gesamt drehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

Summe über Einzel drehimpulse $\vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i m_i = \vec{L}_i$

es gilt: $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}_{\text{ext}}(t) \quad \text{Drehimpulsbilanz}$

Drehmoment $\vec{M}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{u}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t)$

für $\vec{M}_{\text{ext}} = 0 \quad \Downarrow \quad \vec{L}(t) = \vec{L}_0 = \text{konstant}$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_{* \stackrel{!}{=} 0, \text{ zu zeigen}}$$

$$\begin{aligned} * &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j \rightarrow i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j \rightarrow i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{i \rightarrow j} \quad (\text{actio = reactio}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{f}_{j \rightarrow i} \quad (i \leftrightarrow j) \end{aligned}$$

$$* = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{j \rightarrow i} = 0, \text{ weil } \times\text{-Produkt zweier paralleler Vektoren wenn } \vec{f} \text{ entlang } \vec{r}_i - \vec{r}_j \text{ wirkt}$$

d) Energiebilanz

$$\text{Def. Gesamtenergie} \quad E = \underbrace{\sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2}}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{V}_{\text{potentiell, ist zu bestimmen}}$$

\sum_i Energiebilanz d. Einzelteilgrößen mittels Newton'scher Gesetze.

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\vec{f}_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t)}_{-\vec{\nabla}_i V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t)} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_*$$

Teil d. vollständigen Differentials

$$\frac{d}{dt} T = \sum_i - \left(\frac{d}{dt} V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) \right) + *$$

$$* = \left| \text{Behandlg. analog zu (c)} \quad \text{„} x^a \rightarrow \dot{x}^a \text{“} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \right) \cdot \vec{f}_{j \rightarrow i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)$$

Potentialkraft mit $\vec{f}_{j \rightarrow i} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} V_{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{d}{dt} V_{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t) \right)$$

insgesamt:

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_i V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)}_{\text{Energie } \bar{E} \text{ d. Vielteilchensystems, setzt sich aus kinetisch, extern potentiell, internpotentiell zusammen}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\sum_{i,j} V_{\text{int}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t) + \sum_i V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t)}_{\text{für aus instabile Felder, nur (} \nabla \text{) kann die existenz sein)} \right)$$

Energie \bar{E} d. Vielteilchensystems, setzt sich aus kinetisch, extern potentiell, internpotentiell zusammen

für aus instabile Felder, nur (∇) kann die existenz sein

$$\frac{d}{dt} \bar{E} = \frac{\partial}{\partial t} V_{\text{ext}}(t) \quad \text{Energiebilanz}$$

$$\text{für } V_{\text{ext}} = \sum_i V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \quad \downarrow \quad \text{Energieerhaltung}$$

1.3. Noethertheorem, Erhaltungssätze

„Jede Symmetrie gibt einen Erhaltungssatz“

Ein Transformation des (q_i, \dot{q}_i, t) in $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

die entweder L nicht ändert oder zu einem $L'(q'_i, \dot{q}'_i, t')$ führt,

und die Bewegungsgleichungen nicht ändert, heißt

Symmetrie transformation (ST)

Noethertheorem:

Jede infinitesimale ST mit $L-L' = \delta L = 0$ (oder $\frac{dR}{dt}$)

ist mit einem Erhaltungssatz verknüpft.

Name d. Symmetrien:

a) Aus Homogenität der Zeit \rightarrow Energieerhaltung $t \xrightarrow{ST} t + \delta t$ (δt : kleine Konstante)

b) Aus „ „ des Raums \rightarrow Impulserhaltung $\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n + \delta \vec{a}$ ($\delta \vec{a}$: „-“)

c) Aus Isotropie d. Raums \rightarrow Drehimpulserhaltung $\vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n + \delta \vec{\phi} \times \vec{r}_n$ ($\delta \vec{\phi}$: „-“)

Noether Theorem ist allg. Formulierung d. Erhaltungssätze.

a) Erhaltung d. Energie

Voraussetz.: Invariant von L gegen kleine Verschiebung δt

z.z.: aus $\{\vec{r}_u, \dot{\vec{r}}_u, t\} \xrightarrow{\delta T} \{\vec{r}_u, \dot{\vec{r}}_u, t + \delta t\}$ und $\delta L = 0$ folgt $\frac{d}{dt} E = 0$

Beweis $\delta L = L(\vec{r}_u, \dot{\vec{r}}_u, t + \delta t) - L(\vec{r}_u, \dot{\vec{r}}_u, t) = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = 0$
1. Ordng. Taylor weil $\delta L = 0$

wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann bekannt nach Lagrange II: $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} E = 0 \quad \checkmark$

Bsp: $L = T - V = \sum_u \frac{m_u}{2} \dot{\vec{r}}_u^2 - \frac{1}{2} \sum_{u,v} V_{ij}(\vec{r}_u - \vec{r}_v)$

$L \rightarrow L'$: $\dot{\vec{r}}_u(t) \rightarrow \dot{\vec{r}}_u(t + \delta t)$ $\vec{r}_u(t) - \vec{r}_v(t) \rightarrow \vec{r}_u(t + \delta t) - \vec{r}_v(t + \delta t)$

$\dot{\vec{r}}_u = \dot{\vec{r}}_u$

V bzgl. δt in Taylorreihe entwickeln

$\dots (\dot{\vec{r}}_u(t) - \dot{\vec{r}}_v(t)) \delta t$
($\nabla_{\vec{r}_u - \vec{r}_v}$:) an- \vec{r} Ableit.

$\frac{d}{dt} \dots \equiv \frac{dE}{dt}$

zu Hause: b, c