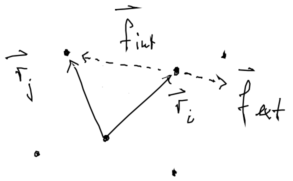
V Vielteilchensysteme

1. Formulierung und Erhaltungssätze

1.1. Newtongleichungen



N wechselwirkende Teilchen $(1 \dots i, \dots j, \dots N)$

+ externe Kraft

$$\vec{f}^{\,i} = \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \vec{f}_{int}(\vec{r}_i, t)$$

Kraft auf i-tes Teilchen — äußere Kraft (vorgegeben) — innere Kraft (Summe der Teilchen die zum System gehören)

$$\vec{f}_{int}(\vec{r}_i, t) = \sum_{j \neq i} f_{j \to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)$$

Summe über alle anderen Teilchen j (ohne i)

Kraft des j-ten Teilchens auf $\vec{r}_i$

typischerweise abhängig von $\vec{r}_i - \vec{r}_j$:

Gravitation nach Newton

statische elektromagnetische Felder

t: für retardierte Felder

Newtongleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i(t)\right) = \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{f}_{j \to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)$$

wissen, actio = reactio: $\vec{f}_{j \to i} = -\vec{f}_{i \to j}$

(Kontext: Gravitation, siehe VL)

1.2. Bilanzen und Erhaltungssätze :

$\dot{X} = Y \hat{=}$ allgemeine Bilanz

$\dot{X} = 0 \hat{=}$ X - Erhaltung

a) Schwerpunktsbilanz

Def. d. Schwerpunkts : $\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i(t)$, $M \hat{=}$ Gesamtmasse $\sum_i m_i$

Massengewichtetes Mittel der Ortsvektoren

$\sum_i$ Newtongleichg. des i-ten Teilchens :

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{i \neq j} \vec{f}_{j \to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_{*}$$

$$* = \sum_{ij} \vec{f}_{j \to i} \underset{\text{actio - reactio}}{=} - \sum_{ij} \vec{f}_{i \to j} \underset{i \leftrightarrow j}{=} - \sum_{ij} \vec{f}_{j \to i} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt} \left[M \dot{\vec{R}}(t) \right] = \sum_i \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t) \equiv \vec{F}_{ext}(t) \quad . \quad \text{Schwerpunktsbilanz}$$

- Der Impuls des Schwerpunkts $\vec{R}$ bewegt sich mit Gesamtmasse M so, als wenn die Summe aller externen Kräfte am Schwerpunkt angreifen.
- Rechtfertigung d. Massepunktmodells
- für $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}}(t) = \vec{V}_0$ = Konst. (Erhaltungsgröße)
(geradlinig gleichförmig)

• kann auch als Impulsbilanz gelesen werden.

b) Impulsbilanz

Def. d. Gesamtimpulses $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i(t)$

Summe über alle Einzelimpulse

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}_{ext} \qquad \text{Impulsbilanz}$$

für $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}(t) = \vec{P}_0 = \text{konstant}$ (Erhaltungsgröße)

c) Drehimpulsbilanz

Def. Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

Summe über Einzeldrehimpulse $\vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i m_i = \vec{\ell}_i$

es gilt: $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_{ext}(t)$ Drehimpulsbilanz

Drehmoment $\vec{M}_{ext} = \sum_i \vec{m}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t)$

für $\vec{M}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}_0 = \text{konstant}$

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j\to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_{* \overset{!}{=} 0 \text{, zu zeigen}}$$

$$* = \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j\to i} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{j\to i}}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{i\to j} \qquad \text{(actio = reactio)}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{f}_{j\to i} \qquad (i \leftrightarrow j)$$

$$* = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{j\to i} = 0,$$ weil X-Produkt zweier paralleler Vektoren wenn $\vec{f}$ entlang $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ wirkt

d) Energiebilanz

Def. Gesamtenergie $$E = \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{V}_{\text{potentiell, ist zu bestimmen}}$$

$\sum_i$ Energiebilanz d. Einteilchengrößen mittels Newton Gl.

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\underbrace{\vec{f}_{ext}(\vec{r}_i, t)}_{-\vec{\nabla}_i V_{ext}(\vec{r}_i, t)}}_{\text{Teil d. vollständigen Differentials}} + \underbrace{\sum_{j,i} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{f}_{j\to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}_{*}$$

$$\frac{d}{dt} T = \sum_i -\left(\frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_i, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_{ext}(\vec{r}_i, t)\right) + *$$

$$* = \left| \text{Behandlg. analog zu (c) } „x" \to „\cdot" \right| =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j\right) \cdot \underbrace{\vec{f}_{j\to i}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, t)}$$

Potentialkraft mit $\vec{f}_{j-i} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{d}{dt} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)\right)$$

insgesamt:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} + \sum_i V_{ext}(\vec{r}_i, t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)\right)}_{\text{Energie } E \text{ d. Vielteilchensystems, setzt sich aus kinetisch, externpotentiell, internpotentiell zusammen}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{ij} \underbrace{V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)} + \sum_i V_{ext}(\vec{r}_i, t)\right)$$

für uns in statische Fällen Null (G. Wellen die emittiert werden)

$$\frac{d}{dt}E = \frac{\partial}{\partial t} V_{ext}(t) \qquad \text{Energiebilanz}$$

für $V_{ext} = \sum_i V_{ext}(\vec{r}_i, \cancel{t}) \quad \Downarrow \quad$ Energieerhaltung

1.3. Noethertheorem, Erhaltungssätze

„Jede Symmetrie gibt einen Erhaltungssatz"

Eine Transformation der $(q_i, \dot{q}_i, t)$ in $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

die entweder L nicht ändert oder zu einem $L'(q_i', \dot{q}_i', t')$ führt,

und die Bewegungsgleichungen nicht ändert, heißt

Symmetrietransformation (ST)

Noether theorem:

Jede infinitesimale ST mit $L - L' = \delta L = 0$ (oder $\frac{dR}{dt}$)

ist mit einem Erhaltungssatz verknüpft.

Namen d. Symmetrien:

a) Aus Homogenität der Zeit $\rightarrow$ Energieerhaltung $\quad t \xrightarrow{ST} t + \delta t$ (δt: kleine Konstante)

b) Aus " des Raums $\rightarrow$ Impulserhaltung $\quad \vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n + \delta\vec{a}$ ($\delta\vec{a}$: -"-)

c) Aus Isotropie d. Raums $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung $\quad \vec{r}_n \rightarrow \vec{r}_n + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_n$ ($\delta\vec{\phi}$: -"-)

Noethertheorem ist allg. Formulierg. d. Erhaltungssätze.

a) Erhaltung d. Energie

Vorauss.: Invarianz von L gegen kleine Verschiebung δt

z.z.: aus $\left\{\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, t\right\} \xrightarrow{ST} \left\{\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, t+\delta t\right\}$ und $\delta L = 0$ folgt $\frac{d}{dt} E = 0$

Beweis $\delta L = L\left(\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, t+\delta t\right) - L\left(\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, t\right) = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = 0$

1. Ordg. Taylor — weil $\delta L = 0$

wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann bekannt aus Lagrange II: $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} E = 0$ ✓

Bsp: $L = T - V = \underbrace{\sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n,m} V_{int}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)}$

$L \to L'$: $\dot{\vec{r}}_n(t) \to \dot{\vec{r}}_n(t+\delta t)$ $\quad \vec{r}_n(t) - \vec{r}_m(t) \to \vec{r}_n(t+\delta t) - \vec{r}_m(t+\delta t)$

$\Downarrow \; \dot{\vec{r}}_n = \dot{\vec{r}}_n{}'$ $\quad$ V bzgl. δt in Taylorreihe entwickeln

$(\nabla_{\vec{r}_n - \vec{r}_m}:)$ äußere Ableitg. $\underbrace{\ldots \left(\dot{\vec{r}}_n(t) - \dot{\vec{r}}_m(t)\right)}_{\frac{d}{dt}\ldots} \delta t \equiv \frac{dR}{dt}$

zu Hause: b, c