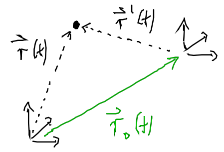
5. Beschleunigte Koordinatensysteme der Newtonmechanik

5.1. Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen



$\Sigma\ (\vec{e}_i)$

Fixsternhimmel

$\Rightarrow$ Newtongleichung gilt

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$: eingeprägte Kraft

($\hat{=}$ Inertialsystem)

$\Sigma'\ (\vec{e}_i\,'(t))$: im allgemein beschleunigt

i) Bewegung d. Koordinatenursprungs $\vec{r}_0(t)$

ii) Koordinatensystem kann sich drehen $\vec{e}_i\,'(t)$

ein Massenpunkt P mit Masse m erfüllt:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$$

Ziel: Herleitung einer Bewegungsgleichung für $\vec{r}\,'(t)$, wenn man in Σ' Beobachter ist

wissen: Newtongleichg. in Σ, Ziel: $\ddot{\vec{r}}\,'(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}\,'(t) \qquad \text{in } \Sigma' \text{ gilt: } \vec{r}\,'(t) = \sum_i x_i'(t)\,\vec{e}_i\,'(t)$$

$$= \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i \left(\dot{x}_i'\,\vec{e}_i\,' + x_i'\,\dot{\vec{e}}_i\,'\right)$$

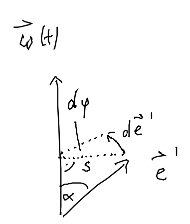
Translationsgeschwindigkeit Σ'

$\dot{x}_i'$ $\hat{=}$ Geschwindigkeit des MP die der rotierende Beobachter in Σ' misst.

$\dot{\vec{e}}_i\,'$ $\hat{=}$ Rotationsanteil, genauer untersuchen

$\dot{\vec{e}}_i\,' = ?$, führe $\vec{\omega}(t)$: momentane Winkelgeschwindigkeit von Σ'

beschreibt Drehg. $d\varphi$ $\perp$ zu $\vec{\omega}$ pro Zeiteinheit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$



$$d\vec{e}\,' = \underbrace{s}_{|\vec{e}\,'|\sin\alpha}\ \underbrace{d\varphi}_{|\vec{\omega}(t)|\,dt}\ \vec{f}_0 \qquad (\vec{f}_0 : \text{Einheitsvektor} \perp \text{ zu } \vec{\omega} \text{ und } \vec{e}\,')$$

: stellt Kreuzprodukt dar!

$s \perp$ Abstand von $\vec{\omega}$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}\,'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}\,'}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \underbrace{\dot{\vec{r}}'(t) / \text{Ableitg. von } \vec{r}' \text{ in } \Sigma'}_{\substack{\text{Ziel ist Gleichg. f. } \ddot{\vec{r}}' \text{ in } \Sigma' \\ \text{f. Beobachter mit feststehenden } \vec{e}_i'}} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

wissen: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$ nur eingeprägte Kräfte, mit m multiplizieren, nach $\ddot{\vec{r}}'$ umstellen

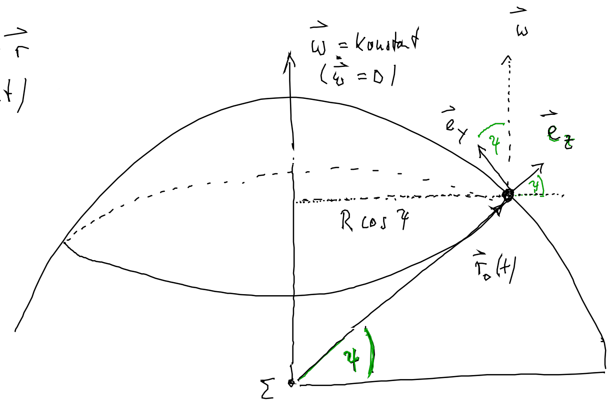
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)}_{\substack{\text{eingeprägte Kraft} \\ \text{in } \Sigma' \text{ Koordinaten}}} \underbrace{- m\ddot{\vec{r}}_0}_{\substack{\text{Translation} \\ \text{von } \Sigma'}} \underbrace{- 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\substack{\text{Corioliskraft} \\ \neq 0 \text{ f. } \dot{\vec{r}}' \neq 0}} \underbrace{- m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')}_{\substack{\text{Winkelbeschleunigungs-} \\ \text{kraft}}} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

Zusätzliche Kräfte im beschleunigten KS Σ'

- Scheinkräfte: ungünstiges KS Σ' täuscht diese vor
- Trägheitskräfte: stellen Trägheitsgesetz im Inertialsystem sicher bei Beobachtg. in Σ'

5.2. Bewegung auf rotierender Erde

$\vec{r}' \to \vec{r}$ (Faulheit)



R: Erdradius

$|\vec{r}_0| = R$

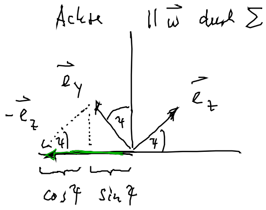
$\vec{e}_x$ in Zeichenebene

gemacht Bahnkurve: $m\ddot{\vec r} = -mg\vec e_z - m\ddot{\vec r}_0 - m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) - 2m(\vec\omega\times\dot{\vec r})$ f. $\dot{\vec\omega}=0$

Gravitation ($\vec g$)   a) Kreisbewegg. d. Ursprungs   b) Zentrifugal   c) Coriolis

a) Beschleunigg Koordinatenursprung: $\ddot{\vec r}_0 = \omega^2 \underbrace{R\cos\vartheta}_{\text{Bahnradius}} \underbrace{(0, \sin\vartheta, -\cos\vartheta)}_{\text{Projektion der nach innen gerichtet Kraft ist sofort Richtungsvektor}}$

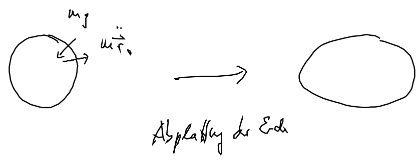
Achse $\parallel \vec\omega$ durch Σ'



$$m\ddot{\vec r}'\Big|_{\ddot{\vec r}_0} = -m\ddot{\vec r}_0 = -m\omega^2 R\cos\vartheta\,(0, \sin\vartheta, -\cos\vartheta)$$

Kraft auf MP auf Oberfläche wirkt nach außen: „Zentrifugalkraft" (weiter)

oft wird $-mg\vec e_z - m\ddot{\vec r}_0$ zusammengefasst zu einer effektiven Fallbeschleunigg., diese ist ϑ, also breitenabhängig



$\rightarrow \varphi \sim \frac{1}{r} + \alpha\frac{1}{r^3} f(\vartheta)$

b) Zentrifugalkraft $\vec f_z$

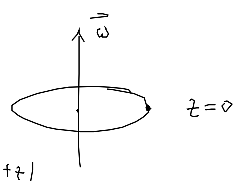
$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = \vec\omega(\vec\omega\cdot\vec r) - \omega^2\vec r$$

f. Skalarprodukt: $\vec r = (x, y, z)$ und $\vec\omega = 0\cdot\vec e_x + \omega\cos\vartheta\,\vec e_y + \omega\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}_{\sin\vartheta}\vec e_z$

$$\vec\omega = \omega(0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)$$

$$\vec f_z = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = -m\omega^2\left(-x, -\sin^2\vartheta\, y + \cos\vartheta\sin\vartheta\, z, \sin\vartheta\cos\vartheta\, y - \cos^2\vartheta\, z\right)$$

Einfachste Anwendung ist Karussel:



$$m\ddot z = m\omega^2 z + m\omega^2 R = \underbrace{m\omega^2(R+z)}_{\text{Beschleunigg nach außen}}$$

c) Corioliskraft: für bewegte Objekte relevant $\vec{f}_c$

$$\vec{f}_c = -m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\dot{z} - \sin\varphi\,\dot{y} \\ \sin\varphi\,\dot{x} \\ -\cos\varphi\,\dot{x} \end{pmatrix}$$

Wichtigkeit v. $\vec{f}_c$ durch Größenordnungsabschätzg:

$$\underbrace{\underset{\text{Zentrifugal}}{m\omega^2|\vec{r}|} \ll \underset{\text{Coriolis}}{m\omega|\dot{\vec{r}}|}} \ll \underset{\text{effektive Gravitation}}{m g_{\text{effektiv}}}$$

wissen: $\omega = 10^{-5}\,\frac{1}{s}$

$$\underbrace{\omega r}_{10^{-5}\frac{m}{s}} \ll \underbrace{\dot{r}}_{\frac{m}{s}}$$

$r \approx 1m$, $t \approx 1s$ $\rightarrow \dot{r} = 1\frac{m}{s}$

genaue Diskussion Corioliskraft:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m\omega\left(\cos\varphi\,\dot{z} - \sin\varphi\,\dot{y}\right) \\ m\ddot{y} &= -2m\omega\,\sin\varphi\,\dot{x} \\ m\ddot{z} &= 2m\omega\cos\varphi\,\dot{x} - mg \end{aligned}\right\}$$

ist leicht zu lösen, weil lineares Dgl.-System

<u>1. Bsp:</u> Ostabweichung beim freien Fall in Störungstheorie, Störung: Scheinkräfte

ohne Störung $z^{(0)} = h - \frac{g}{2}t^2$, $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$

mit Störg. 1. Ordng. $x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)}$, $y = y^{(0)} + \varepsilon y^{(1)}$, $z = z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)}$

einsetzen, Potenzen in ε vergleichen, wobei $\vec{f}_c \rightarrow \varepsilon\vec{f}_c$

$$m\ddot{x}^{(1)} = 2m\omega\cos\varphi\,g t \quad\rightarrow\quad x^{(1)} = \omega\cos\varphi\,g\,\frac{t^3}{3}$$

$\hat{=}$ Ostabweichung in $\vec{e}_x$-Richtg.

existiert auf beiden Halbkugeln ($\cos\varphi$).

<u>2. Bsp:</u> Ablenkung v. horizontaler Bewegung, $\dot z = \ddot z = 0$, keine Gravitation

$m\ddot z = 0$

$m\ddot x = 2m\omega \sin\varphi \,\dot y$

$m\ddot y = -2m\omega \sin\varphi \,\dot x$

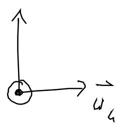
<u>Behauptg:</u> $m\ddot{\vec r} = -2m\,\vec\omega_h \times \dot{\vec r}$

$\vec\omega_h = \omega \sin\varphi \,\vec e_z$

Beweis: ausrechnen d. Kreuzprodukts üb. Determinante

$\vec f_c = -2m\,\vec\omega_h \times \dot{\vec r}$ Nordhalbkugel $\sin\varphi > 0$: Rechtsablenkg.

Südhalbkugel $\sin\varphi < 0$: Linksablenkg.



z - Richtg.

<u>wichtig:</u> Meeresströmungen, Wind, Badewanne

<u>3. Bsp:</u> ÜA: Foucaultsches Pendel $\ddot x = -\frac{g}{l}x$, $\ddot y = -\frac{g}{l}y$ mit Scheinkräften