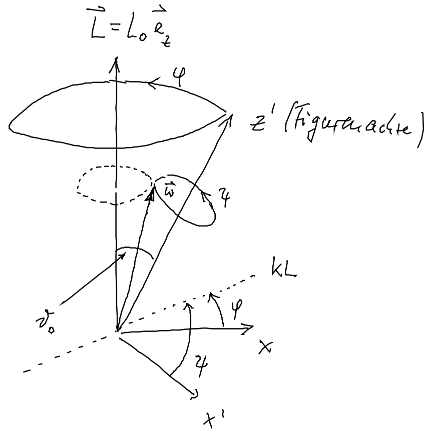
Interpretation Kreiselbewegung über Eulersche Winkel

a) Figurenachse (z') umläuft $\vec{L}$ = konstant (z-Achse)

mit festem Winkel ϑ_0 : „Nutationskegel"

$\vec{\omega}_z = \dot{\varphi}\vec{e}_z \quad , \quad \dot{\varphi} = \frac{q_0}{\sin\vartheta_0}$



b) gleichzeitig rotiert Kreisel um z'-Achse (Figurenachse)

$\vec{\omega}_{z'} = \dot{\psi}\vec{e}_{z'} \quad , \quad \dot{\psi} = K$

Bewegung um z' beschreibt „Polkegel"

c) $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\psi}\vec{e}_{z'}$

$\vec{\omega}$ wandert mit z' mit und beschreibt den Spurkegel ....

Polkegel rollt auf dem Spurkegel ab

d) Rotationsachse $\vec{\omega}$ und Figurenachse fallen nicht zusammen

3. Gekoppelte Schwingungen

Ziel: allgemeine Theorie von schwingungsfähigen gekoppelten Massepunkten

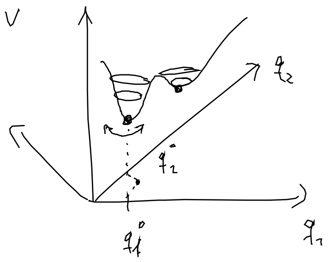
typ. Wechselwirkungspotential $V = \sum_{ij} \underbrace{a_{ij}}_{\text{Konstante}} \underbrace{q_i q_j}_{\text{Koordinaten}}$: quadratische Form, kann exakt durch Diagonalisierung gelöst werden

Idee: verkoppelte MP auf andere, fiktive nicht-wechselwirkende MP zurückführen

3.1. Lagrangetechnik f. gekoppelte Oszillatoren

N-Teilchensystem: $L = T - V = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2}}_{\text{kinetisch}} - \underbrace{\sum_{n,m} V_{nm} (\vec{r}_n - \vec{r}_m)}_{\text{potentielle Energie f. alle Paarwechselwirkungen}}$

Koordinaten $\underbrace{\vec{r}_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}) \; (x_n, y_n, z_n)}_{3 \cdot N \text{ Einträge}} \quad \forall n \longrightarrow \{q_i\} = \underbrace{\{x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \dots z_N\}}_{3N \text{ Einträge}}$



V auftragen in hoch dimensionalen Raum
suche Energieminima ($V, T=0$) in
die das System annimmt im Gleichgewicht

<u>Idee:</u> 1.) Koordinatensystem in Minimum zu verschieben $\quad q_i \to \underset{\overset{\|}{0}}{q_i^0} + \underbrace{q_i}_{\text{Variable}}$

2.) Potential bis 2. Ordnung entwickeln

$$V(\{q_i\}) = \underbrace{V(q_i^0 = 0)}_{\text{Eichfreiheit, Null gesetzt}} + \underbrace{\sum_i q_i \, \partial_{q_i^0} V(q_i^0)\Big|_{q_i^0=0}}_{\text{verschwindet weil Potentialminimum}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} q_i q_j \underbrace{\partial_{q_i^0} \partial_{q_j^0} V(\{q_n^0\})\Big|_{\substack{q_i^0=0\\ q_j^0=0}}}_{K_{ij} = K_{ji} \text{ „Kraftkonstante"}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{V(\{q_i\})}_{\text{kleine Auslenkungen}} = \sum_{ij} \frac{K_{ij}}{2} q_i q_j$$

$$\Rightarrow \quad L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} q_i q_j$$

Lagrangegleichungen: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \frac{m_i}{2} 2 \dot{q}_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} = m_k \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} \left(\delta_{ik} q_j + q_i \delta_{jk} \right) \underset{\uparrow}{=} -\sum_j K_{kj} q_j$$

Indexumbenennung.

$$\Rightarrow \quad m_k \ddot{q}_k = -\sum_j k_{kj} q_j$$ Bewegungsgleichung im Minimum d. Potentials

Auslenkung q_k wird angetrieben d. Auslenkung von q_j mit Kraftkonstanten k_{ij}

neue Koordinaten $q_k \to u_k = q_k \sqrt{m_k}$, $k_{kj} \to \tilde{k}_{kj} = \frac{k_{kj}}{\sqrt{m_k}\sqrt{m_j}}$

$$\ddot{u}_k = -\sum_j \frac{k_{kj}}{\sqrt{m_k}\sqrt{m_j}} u_j = -\sum_j \tilde{k}_{kj} u_j$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u}_k = -\sum_j \tilde{k}_{kj} u_j$$, Ansatz: $u_j(t) = A_j(\omega) e^{i\omega t}$

suche nach kollektiven Oszillationen

$$\sum_j \left(-\omega^2 \delta_{kj} + \tilde{K}_{kj}\right) A_j(\omega) = 0 \quad \text{oder:} \quad \underbrace{\sum_j \tilde{K}_{kj} A_j = \omega^2 A_k}$$

Eigenwertproblem mit Eigenwert ω^2 und Eigenvektoren $\{A_k\}$

Bemerkungen:

a) wisse $K_{ij} = K_{ji}$ symmetrisch, reell $\rightarrow$ positive Eigenwerte ω^2

es existieren $\alpha = 1, 2 \cdots 3N$ Eigenwerte ω_α^2,

d.h. Systemschwingungen ω_α

später: die ω_α beschreiben ungekoppelte Oszillatoren

b) zu jeden ω_α gehört mindestens ein $\vec{A}^\alpha = \{A_k^\alpha\}$

die $\vec{A}^\alpha$ stellen ein vollständiges und orthogonales System dar:

$$\sum_\alpha A_k^\alpha A_j^\alpha = \delta_{kj}, \quad \sum_j A_j^\alpha A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

c) alle Lösungen u_i sind als Überlagerung von $\vec{A}^\alpha$ darstellbar

$$u_i = \sum_\alpha \eta_\alpha A_i^\alpha e^{i\omega_\alpha t} \quad \hat{=} \text{ Entwicklg. nach vollständigem mit Koeffizienten } \eta_\alpha$$

andere Schreibweise:

$$u_i = \sum_\alpha \eta_\alpha(t) A_i(\omega_\alpha) \quad :$$

d) Verallgemeinerg. $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 \rightarrow \sum_{ij} \frac{m_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j$ ist mgl.

Lagrangefunktion in $y_\alpha, \dot{y}_\alpha$ dargestellt:

siehe (b)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{\underline{i,\alpha,\beta}} \dot{y}_\alpha \dot{y}_\beta \underline{A_i}(\omega_\alpha) \underline{A_i}(\omega_\beta) = \Big| \text{''} - \text{''} \hat{=} \delta_{\alpha\beta} \Big| = \frac{1}{2}\sum_\alpha \dot{y}_\alpha^2$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij} \tilde{K}_{ij} u_i u_j = \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ \alpha\beta}} \tilde{K}_{i\underline{j}} y_\alpha y_\beta A_i(\omega_\alpha) \underline{A_j}(\omega_\beta) = \Big| \text{''} - \text{''} \hat{=} A_i(\omega_\beta)\, \omega_\beta^2 \Big|$$

nutze Eigenwertgl.

$$= \frac{1}{2}\sum_{\underline{i,\alpha,\beta}} y_\alpha y_\beta\, \omega_\beta^2\, \underline{A_i}(\omega_\alpha) \underline{A_i}(\omega_\beta) = \Big| \text{''} - \text{''} \hat{=} \delta_{\alpha\beta} \Big| = \frac{1}{2}\sum_\alpha \omega_\alpha^2 y_\alpha^2$$

$$\Rightarrow L = \sum_\alpha \left(\frac{1}{2}\dot{y}_\alpha^2 - \frac{1}{2}\omega_\alpha^2 y_\alpha^2 \right)$$

erreicht: Lagrangefunktion von unabhängigen Oszillatoren $\{\alpha: 1 \dots 3N\}$

Bewegungsgl.: $\ddot{y}_\alpha = -\omega_\alpha^2 y_\alpha \quad \forall \alpha$, die Lösungen sind bekannt

3.2. Nebenbedingungen f. Schwingungen

Trenng. v. Schwerpunktbewgg., Rotation und Schwingg. um reine Schwingungen zu untersuchen.

3N Freiheitsgrade (FG)

a) Schwerpunkt 3 FG, b) Rotation 3 FG

i.a. findet man 3N − 6 Schwingungen, N: Anzahl Teilchen

(z.B. in Spektroskopie möchte man die verschiedenen FG trennen)

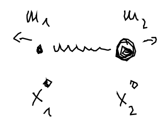
Achtg. Formel nicht gedankenlos verwenden: Teilchen auf einer Geraden haben 1 Rotation weniger

zu a) $M\vec{R} = \sum_n m_n \vec{r}_n = \text{fest}$ $\quad \dot{\vec{R}} = 0$ $\Rightarrow$ Forderung um SP festzuhalten

zu b) $\vec{L} = \hat{\Theta}\vec{\omega} = 0$, d.h. $\sum_n m_n \vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n = 0$ $\Rightarrow$ Fordrg. um Rotation zu verhindern

Sind Nebenbedingungen um reine Schwingungen zu bestimmen.

<u>Beispiel</u>: 2atomare Molekül, 2. Schwinger, etc:



, $x_1 = x_1^0 + q_1(t)$, $x_2 = x_2^0 + q_2(t)$

Ruhelagen x_i^0 $\qquad$ wöllen $x_1^0 = 0 = x_2^0$ f. Potential minimum

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 = \frac{m_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 \Big|_{x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0} = \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 = \frac{k}{2}\left(q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2\right)$$

2. Ordng.

<u>Schwingungszahl</u>: $\underset{2}{\underset{\shortparallel}{N}} - \overset{\text{SP}}{1} - \overset{\text{Rot.}}{0} = 1$ Schwingg.

$M R = m_1 x_1 + m_2 x_2 \overset{!}{=} 0$ Nebenbedingg. $(x_1^0 = 0 = x_2^0)$ $\Rightarrow$ $q_2 = -\frac{m_1}{m_2} q_1$

q_2 durch q_1 ausdrücken:

$$L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)\dot{q}_1^2 - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 q_1^2$$

q_1 Schwingg. nicht am

Verhalten bestimmt Schwingungsfrequenz

$$= \frac{m_0}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{k_0}{2} q_1^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Die Oszillation findet mit gemeinsamer Frequenz statt die durch die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ bestimmt ist.